ÆGIDII FRANCISCI
DE GOTTIGNIES

Bruxellensis è Societate IESV
In Collegio Romano
MATHESEOS PROFESSORIS

EPISTOLARVM MATHEMATICARVM
LIBER PRIMVS.

AD ILLVSTRISSIMVM ET EXCELLENTISSIMVM PRINCIPEM

D. LIVIVM ODESCALCVM
CÆRE DVCEM
SANCTISSIMI DOMINI NOSTRI
INNOCENTII XI.
EX FRATRE NEPOTEM.



ROMAE, Typis Nicolai Angeli Tinassij. M. DC. LXXVIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

ILL:^MO ET EXCELL:^MO PRINCIPI

D. LIVIO ODESCALCO

AEGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis Iesu

FELICITATEM.



RATVLARI maximè & Tibi nominatim libet, & Christianæ in vniuersum Reipublicæ licet, Excellentissime Princeps, Tibi quòd peruetusta, clarissimaque Odescalca Familia laudatissimæ institutioni Tuæ, viuidum, & efficax in exemplum, Patruum Tibi prudentissimum, grauissimumque progenuit: Christianæ Reipublicæ, quòd Purpuratorum Patrum conspirata, inspirataque Deo suffragia communem, optimumque illi Parentem, INNOCENTIVM XI. Pontificem Maximum, Sanctissimumque dedere, in quo, quod insitum quidem in rebus omnibus esse diffiteri non possumus, at in permultis latet,

Patrui exemplum laudanda semper facias numero, pondere, & mensura, Tua tamen decora ab vllo numerari, expendi, æstimarique non pateris. In hoc porrò virtutis tuæ tanto penetrali, adytoque persancto quid faciam, nisi vt Religiosæ modestiæ exemplum à tam iuuene, tantoque Principe grandis ipse vir, Religiosusque desumam? Deique interim prouidẽtissimam Benignitatem votis omnibus, & enixis rogem, vt adeò non opportunum modò, sed necessarium per hæc tempora Ecclesiæ suæ Præsidem diù sospitem, felicemque conseruet; Teque simul, ad plurimorum præsidium, omniumque solatium, affluentiùs semper incolumem, & solido cum fructu florentiorem efficiat? Vota Deus è Cælo firmet. Vale.



LIBER

LIBRI PRIMI EPISTOLARVM MATHEMATICARVM ARGVMENTVM.

N prima Epiſtola expenditur, vtrum recentiores Algebrę ſcriptores demonſtrauerint verum eſſe, quod ab antiquioribus inter Algebræ fundamenta, abſque vlla probatione aſſumitur: nimirum ſigno — affici debere productum quod oritur ex multiplicatione duarum quantitatum, quarum altera ſigno † altera ſigno — afficitur; & præterea ſigno † affici debere productum, quod oritur ex multiplicatione duarum quantitatum, quæ ſingulæ ſigno — afficiuntur. Deinde conſideratur vtrum huius fundamenti veritas conueniat cum reliquis Algebrę fundamentis.

In ſecunda Epiſtola proponitur ac demonſtratur reſolutio rigoroſa quarumdam compoſitarum æquationum.

In tertia Epiſtola traditur facilis modus componendi formulas, quibus vtimur in praxi propoſita in appendice libri primi Logiſticæ, pro inuenienda quacunque radice proxima cuiuſuis vulgaris numeri.

In quarta Epiſtola habentur varia theoremata ſpectantia ad numeros vulgares carentes aliqua radice;

vel ad quantitates inter ſe incommenſurabiles.

In quinta Epiſtola proponuntur aliqua problemata magis neceſſaria pro vſu numerorum radicalium.

In ſexta Epiſtola demonſtrantur ſingulæ propoſitiones libri primi & ſecundi Euclidis, methodo tradita in noſtra Logiſtica.

In ſeptima Epiſtola, methodo tradita in noſtra Logiſtica, demonſtrantur ſingulæ propoſitiones libri ſeptimi Euclidis.

His ſeptem Epiſtolis accedit tractatus, qui per plures annos inter priuata mea ſcripta delituit, in quo affertur ſolutio nominatiſſimi problematis Mechanici quod totius Stereo-Staticæ fundamentum eſt, *Quare & quomodo vires creſcant per Vectem*. Huius problematis ſolutio prius magis rigoroſis diſcurſibus Mathematicis ſtabilitur; Deinde probatur independenter ab omni Matheſi ſpeculatiua, diſcurſibus Phyſicis.

IOANNES PAVLVS OLIVA

Præpoſitus Generalis Societatis IESV.

CVM Opuſculum, cui titulus Epiſtolæ Mathematicæ P. Aegidij Franciſci de Gottignies noſtræ Societatis Sacerdotis aliquot eiuſdem Societatis Theologi recognouerint, & in lucem edi poſſe probauerint, poteſtatem facimus, vt typis mandetur, ſi ijs ad quos pertinet, ità videbitur. Dat. Romæ 7. Ianuarij 1678.

Ioannes Paulus Oliua.

IMPRIMATVR,
Si videbitur Reuerendiſs. P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

I. De Ang. Archiep. Vrb. Viceſg.

IMPRIMATVR,
Fr. Raymundus Capiſuccus Ord. Prædicatorum Sac. Pal. Apoſt. Mag.

EPIS-

EPISTOLA PRIMA.

ÆGIDIVS FRANCISCVS

DE COTTIGNIES SOCIETATIS IESV

Mathematico Anonimo S.

Respondetur ad Epistolam, sine authoris sui nomine, amica manu delatam: ideoque responsoria inscribitur, ad Mathematicum Anonimum.



Vmmopere me recrearunt priores lineæ epistolæ tuæ: siquidem ex his spem conceperam desiderati à me luminis, quo conspicere possem soliditatem illius doctrinæ, quam multis encomijs celebrari iam pridem scio: ita tamen, vt hactenus ignorem, quo titulo tantopere laudanda sit: mihique etiamnum videbatur solidis fundamentis destituta, quam tu asseris optime fundatam, atque legitimis demonstrationibus innixam subsistere. Fateris quidem D. Cartesium, capaciori (vt tu ais) intelligentia præditum, neglexisse humiliora eius fundamenta: sed tamen asseris, illa ipsa fundamenta, satis feliciter, & amplè subministrata ab eius seguacibus D. D. Schooten, Bartolino &c. atque ex his postremum, clarè ac nitidè prima Cartesianæ Algebræ fundamenta

propoſuiſſe in opuſculo quod inſcribitur. *Principia Matheſeos vniuerſalis, ſeu introductio ad Geometriæ methodum Renati des Cartes*; ibidemque demonſtratas proponi eas propoſitiones, quas in meæ logiſticæ Idea affirmaueram deſiderari apud Algebræ expoſitores. Candide fateor quod citatum abs te opuſculum necdum videram, quando tuas accepi: tamen hoc ipſum quod ad me ſcribis, mihi ſignificauerat vir aliquis doctiſſimus atque mihi amiciſſimus; quam ob rem opuſculum mihi prius ignotum quæſiui, ac tandem inueni. Vbi perlegi citatas abs te demonſtrationes, attonitus atque hæſitabundus ſubſtiti, hæc mecum animo voluens, fierine poteſt vt in ſubſtructionibus Carteſianæ, atque tantis laudibus celebratæ Algebræ, tam enormes defectus inueniantur, quales mihi videre videor? an forte ſolus ego humilioribus aſſuetus, non aſſequor demonſtrationes, quas approbant atque inter legitimas numerant doctores, ſubtiliſſimæ (vt ipſi aiunt) & prope diuinæ Algebræ. Quid dicam? aut me non videre, aut maxime palpabiles errores ſubtiliſſimis illis Geometris inperceptibiles eſſe, concedendum eſt. Poſt hæc, & huiuſmodi pauca alia, dubius quid ſtatuendum eſſet, decreui ad te mittere paucas aliquas ſubſequentes notas; vt ex illis ſtatuas, an noſtri (hoc eſt abs te in tua epiſtola citati) authoris demonſtrationes, debeam admittere inter legitimas, & conſequenter palinodiam canere in eo loco Ideæ meæ logiſticæ, in quo negaui ab Algebræ ſcriptoribus demonſtratas eſſe propoſitiones pro quibus afferuntur. An verò à te concedendum ſit, etiam tui Carteſij Algebram, noſtræ

logiſticæ

logiſticæ debere demonſtrationes prædictarum propoſitionum, quæ numerantur inter primaria atque præcipua eius fundamenta.

PROPOSITIO I.

— Ductum in ✝ producit —

Demonſtratio authoris noſtri expreſſa ſcriptione vſitata in noſtra Logiſtica.

ESto A — B ducendum in C, atque A — B = E: hinc vtrobique addatur B, fiet A = B ✝ E. Iam quoniam æquales quantitates per eamdem quantitatem multiplicatæ producunt æquales: ideo ſi vtrinque multiplicetur per C, etiam A *in* C = B *in* C *et* ✝ E *in* C: hoc eſt auferendo vtrinque B *in* C, etiam A *in* C *et* — B *in* C = E *in* C: quocirca cum ſtatuatur A — B = E, & vtraque parte ducta in C, producatur A *in* C *et* — B *in* C = E *in* C, perſpicuum fit — B ductum in ✝ C producere — B *in* C.

Reſpondetur, in propoſito argumento nuſquam inferri quod probandum erat: nimirum — ductum in ✝ producere —; ſiue facta hypotheſi quod B *in* C = F, tunc etiam — B *in* C = — F: hoc enim probandum erat, ſed nuſquam infertur; illud vero quod toto diſcurſu propoſito tandem concluditur, nimirum — B ductum in ✝ C, producere — B *in* C, manifeſtum eſt ex ipſa ſcriptione aſſumpta, ſed nihil conducit ad finem authori noſtro pro-

poſitum, ſiue ad ſtabiliendam propoſitionem, quam probandam aſſumpſerat; quoniam vero propoſitum argumentum tale eſt, vt ne quidem inferat concluſionem pro cuius probatione adducitur: ſuperfluum videtur reliquos eius defectus annotare.

PROPOSITIO II.

— Ductum in — producit +

Demonſtratio authoris noſtri, expreſſa ſcriptione vſitata in noſtra Logiſtica.

ETenim ſi A — B ducendum ſit in C — D: ponendo vt ante A — B = E, erit productum ex A — B *in* C — D, æquale producto ex E *in* C — D: id eſt C *in* E *et* — D *in* E: ſed C *in* E, vt ſupra, æquatur A *in* C *et* — B *in* C: vnde A *in* C *et* — B *in* C *et* — D *in* E, æquabitur producto ex A — B *in* C — D. Porro cum A — B æqualis ſit poſita ipſi E, & vtraque parte ducta in D, productum A *in* D *et* — B *in* D, æquetur producto D *in* E: hinc ſi ex A *in* C *et* — B *in* C, ſubtrahatur A *in* D *et* — B *in* D, loco D *in* E, ei æquale; erit iuxta regulam ſubtractionis, A *in* C *et* — B *in* C *et* — A *in* D *et* † B *in* D, productum quæſitum; ex quibus liquet — B ductum in — D producere † D *in* B.

Con-

Consideratur proposita demonstratio authoris nostri.

PRimo, si legitime demonstrata est authoris nostri propositio quæ in proposito discursu tandem infertur, nimirum $-B$ *in* $-D = B$ *in* D: etiam inter legitime demonstratas propositiones admittendæ erunt illæ omnes, quæ ex prædicta alijsque legitimè demonstratis propositionibus rectè inferuntur: consideretur itaque subsequens discursus, qui si legitime inferat aliquam propositionem quæ admitti non possit ab authore nostro, neque præcedens eius propositio inter legitime demonstratas erit admittenda. Per authorem nostrum $-B$ *in* $-D = B$ *in* D: ergo $-B$ *in* $-B = B$ *in* B: iam vero iuxta authoris nostri doctrinam, vel $-B$ est aliquid maius aut minus quam B: vel certe $-B = B$; si primum, igitur maior quantitas ducta in seipsam æquatur minori quantitati ductæ in seipsam. Si secundum, quoniam æqualia ducta in idem producunt æqualia, singula ducendo in B, etiam $-B$ *in* $B = B$ *in* B. Quandoquidem igitur iuxta authoris nostri doctrinam, inter propositiones legitime demonstratas admitti non possit, aut maiorem quantitatem ductam in seipsam æquari minori quantitati ductæ in seipsam; aut $-B$ *in* $B = B$ *in* B; etiam inter demonstratas propositiones admittenda non est illa eius propositio in qua asserit $-B$ *in* $-D = B$ *in* D.

Ex his videtur satis manifestum, propositum authoris nostri discursum, demonstratiuum non esse; atque ab ipso

non

non legitime probari, $-B$ *in* $-D = B$ *in* D; videndum tamen, in qua huius discursus parte defectus inueniatur. Vt hic error appareat, reflectendum est ad illam propositionem, in qua dicit, *hinc si ex A in C et* $-B$ *in C subtrahatur A in D et* $-B$ *in D, erit iuxta regulam subtractionis A in C et* $-B$ *in C et* $-A$ *in D et* † *B in D productum quæsitum*. Si nusquam ab authore nostro legitime demonstrata est subtractionis regula ex qua sequatur hæc illatio, manifestum est propositum discursum admitti non posse inter legitimos, atque demonstratiuos discursos; videndum igitur an assumpta subtractionis regula vsquam legitime demonstrata proponatur. Ego certe apud authorem nostrum non inuenio vllam subtractionis regulam, quam conetur demonstrare, præter illam in qua hæc habet: *Cæterum ad subtrahendum quantitates diuersis literis denotatas oportet quantitates subducendas variatis signis connectere cum ijs a quibus subductio fieri debet, vt si subtrahi debeat C* $-$ *D ab A* † *B, erit residuum A* † *B* $-$ *C* † *D: variatis nempe signis quantitatum C et D*. Quidquid sit de discursu quo conatur hanc regulam stabilire: ego non video quomodo ex vi huius regulæ potius sequatur, A *in* C *et* $-$ B *in* C *et* $-$ A *in* D *et* † B *in* D, quam A *in* C *et* $-$ B *in* C *et* $-$ A *in* $-$ D *et* † B *in* $-$ D esse productum subtractionis, in qua ex A *in* C *et* $-$ B *in* C, subtrahitur A *in* D *et* $-$ B *in* D. Etenim quantitates quæ hoc casu subtrahendæ proponuntur, sunt quantitates repræsentatæ a scriptione A *in* D *et* $-$ B *in* D: in qua scriptione per tres diuersas litteras A, B, D, tres diuersæ quantitates repræsentantur, atque in singu-

lis

lis mutando ſigna habetur productum A *in* C *et* — B *in* C *et* — A *in* — D *et* † B *in* — D: quod productum non iuuat authoris intentum. Quod verò hoc caſu non in ſingulis quantitatibus repræſentatis à ſcriptione ſubducenda, ſed tantum in aliquibus mutanda ſint ſigna, non exprimit prædicta regula, & conſequenter ex vi prædictæ ſubtractionis regulæ, pro vt ab authore noſtro proponitur, non ſequitur legitime, quod in propoſito diſcurſu infertur; & quoniam præter hanc vnam ſubtractionis regulam nullam aliam conetur demonſtrare, ne quidem conatur demonſtrare ſubtractionis regulam quam aſſumit in diſcurſu propoſito, atque adeo diſcurſus ille referri non debet inter legitime demonſtratos.

Vidimus hic, inter ſubtractionis regulas quarum demonſtrationem author noſter conatur afferre, non inueniri ſubſtractionis regulam quam in propoſito ſuo diſcurſu aſſumit: atque ex hoc capite reſultantem eius defectum, ob quem demonſtratiua non eſt ſequela quæ ſupponit ſubtractionis regulam. Placet modo conſiderare an hæc ipſa ſequela non repugnet eiuſdem authoris regulis ad ſubtractionem pertinentibus, atque ita manifeſtis, vt ſuperfluum illi videatur eas demonſtrare. In quem finem reſumo eius diſcurſum, ſubſtituendo tamen pro quantitatibus indeterminatis, quantitates determinatas; ſiue pro litteris A, B, C, D, ſubſtituendo numeros 8, 7, 3, 9. Sit igitur 8 — 7 ducendum in 3 — 9: Quandoquidem 8 — 7 = 1, erit productum ex 8. — 7 *in* 3 — 9, æquale producto ex 1 *in* 3 — 9, id eſt ex 3 *in* 1 *et* — 9 *in* 1: ſed 3 *in* 1 = 8 *in* 3 *et* — 7 *in* 3: vnde 8 *in* 3 *et*

3 et − *7 in 3 et* − *9 in* 1 æquabitur producto ex 8 − 7 *in* 3 − 9. Porro cum 8 − 7 = 1, & vtràque parte ductâ in 9, productum ex 8 *in* 9 *et* − 7 *in* 9 æquetur producto ex 9 *in* 1, hinc ſi ex 8 *in* 3 *et* − 7 *in* 3 ſubtrahatur 8 *in* 9 *et* − 7 *in* 9, loco 9 *in* 1: erit iuxta regulam ſubtractionis 8 *in* 3 *et* − 7 *in* 3 *et* − 8 *in* 9 *et* † 7 *in* 9, productum quęſitũ; ex quibus liquet, − 7 *in* − 9 producere 7 *in* 9. Si legitimus atque demõſtratiuus eſt prior authoris noſtri diſcurſus, in quo adhibet litteras A, B, C, D indeterminatè ſignificantes quaſlibet quãtitates, adeoque quoſlibet numeros: certe negari non poterit etiam legitimum atque demonſtratiuum eſſe diſcurſum hic propoſitum: quandoquidem a priori non alter differat, quam quod pro litteris quoſlibet numeros repræſentantibus ſubſtituti ſint numeri indeterminate ſignificati per ipſas litteras. Conſideretur itaque legitimi huius diſcurſus illa propoſitio ad numeros reſtricta, quam paulo ante conſiderauimus non reſtrictam ad numeros, quæque talis eſt; *hinc ſi ex* 8 *in 3 et* − 7 *in* 3, *ſubtrahatur* 8 *in* 9 *et* − 7 *in* 9, *loco* 9 *in* 1: *erit iuxta regulam ſubtractionis*, 8 *in 3 et* − 7 *in 3 et* − 8 *in* 9 *et* † 7 *in* 9, *productum quæſitum*. Igitur iuxta authorem noſtrum ex 8 *in 3 et* − 7 *in* 3, ſubtrahi poteſt 8 *in* 9 *et* − 7 *in* 9: ſed 8 *in 3 et* − 7 *in* 3 = 3, item 8 *in* 9 *et* − 7 in 9 = 9: igitur iuxta authorem noſtrum ex numero 3 ſubtrahi poteſt numerus 9: atque adeo ex minori numero ſubtrahi poteſt maior numerus: igitur falſa eſt illa eius ſubtractionis regula in qua pag. 3. in fine aſſerit, *notandum in eiuſmodi quantitatum ſubtractione, oportere quantitatem illam quæ ex alia*

alia ſubtrahi debet, eſſe minorem &c. & tamen hanc regulam ità euidentem arbitratur, vt ne quidem tentet eam demonſtrare.

Hactenus notatis circa authoris noſtri diſcurſum in quo intendit probare — B *in* — D = B *in* D, addi poteſt, eam propoſitionem legitimè demonſtratam dici non poſſe, ſi iuxta eumdem authorem non habeat ſenſum intelligibilem. Conſideremus igitur an iuxta ipſum habeat ſenſum intelligibilem. Verum maioris claritatis gratia, iterum pro litteris B & D, ſubſtituamus numeros, nimirum 2 & 4. Quod igitur demonſtrare intendit, eſt, minus duo ductum in minus quatuor, producere idem quod producitur ex numero duo, ducto in numerum quatuor. Quid in hac propoſitione ſignificat *minus duo*, vel *minus quatuor*? reſpondet author noſter *minus* & *ſublatum* idem ſignificare, atque conformiter ad hanc reſponſionem, intendit demonſtrare, quod duo ſublatum, ductum in quatuor ſublatum, producat idem quod producit duo ductum in quatuor. Certè iuxta communia principia non poteſt intelligi duo ſublatum, niſi ex aliquo ſublatum intelligatur; quid vero ſit illud ex quo duo ſublatum intelligi debeat, quando expreſsè non additur ex quo ſublatum intelligendum ſit, nuſquam exponit: adeoque non tradit illud quod neceſſe foret vt propoſitio quam intendit probare, haberet ſenſum intelligibilem, & conſequenter iuxta eius doctrinam intelligibilem ſenſum non habet propoſitio quam intendit probare. Memini quidem P. Clauium alioſque nonnullos numeroſæ Algebræ ſcriptores huiuſmodi loquutiones adhibere, atque ità exponere vt *minus duo*, ſiue *duo ſublatum*, ſignificet duo

ſublatum ex nihilo: hoc eſt numerum aliquem chimæricum, duabus vnitatibus minorem ipſo nihilo: ac ſimiliter *quatuor ſublatum*, ſiue *minus quatuor*, ſignificare numerum quatuor vnitatibus minorem nihilo; quoties enim aliquid dicitur *minus* aut *ſublatũ*, ita tamen vt non exprimatur illud, quo minus, vel ex quo ſublatum intelligi debeat, hoc quod minus aut ſublatum dicitur: tunc ſubintelligi volunt ipſum nihil, ita vt ipſo nihilo minus, ſiue ex ipſo nihilo ſublatum intelligatur. Si in hunc modum intelligendi ſunt numeri qui ab authore noſtro dicuntur ſublati, quando non exprimitur ex quo alio numero ſublati debeant intelligi, ſenſum aliquem habebit paulò antè memorata propoſitio quam intendit probare: eritque ſenſus eius quod numerus duabus vnitatibus minor ipſo nihilo, ductus in numerum quatuor vnitatibus minorem ipſo nihilo, producat illud idem quod producitur ex numero duabus vnitatibus maiore nihilo, ducto in numerum quatuor vnitatibus maiorem nihilo. Profectò ſi hanc propoſitionem demonſtrauit, operæ pretium aliquid præſtitit. Etenim inter propoſitiones ab antiquioribus Mathematicis demonſtratas vna inuenitur, quæ aſſerit, inter ſe æqualia eſſe quæ ſingula in ſe ducta producunt æqualia: quare ſi etiam ab authore noſtro demonſtratum ſit, numerum duabus vnitatibus minorem nihilo ductum in ſe, & numerum duabus vnitatibus maiorem nihilo ductum in ſe, producere æqualia: conſtabit planè noua propoſitio, atque hactenus inauditum paradoxum, quod ex his præmiſſis immediatè patet: nimirum numerum duabus vnitatibus minorem nihilo, æquari numero duabus vnitatibus maiori nihilo: ſiue $-2 = 2$;

ex

ex quo vlterius ſequeretur -2 *in* $2 = 2$ *in* 2: æqualia enim in idem ducta producere æqualia admittit author noſter: atqui 2 *in* $2 = 4$, & inter ſe æqualia ſunt, quæ eidem tertio æquantur: igitur etiam -2 *in* $2 = 4$: quod planè repugnat doctrinæ noſtri authoris; etenim in ea propoſitione quam primo loco conſiderauimus (ab ipſo propoſitam quidem, ſed non legitime demonſtratam) docetur verum quidem eſſe quod -2 *in* $2 = -4$, ità tamen vt falſum ſit quod -2 *in* $2 = 4$. Ne inter vniuerſalis Matheſeos fundamenta propoſita ab authore noſtro, admittendę ſint huiuſmodi propoſitiones ſibi inuicem repugnantes, atque contrariæ: malo ego credere ab authore noſtro propoſitas propoſitiones eum ſenſum non admittere, in quo vt diximus, ab aliquibus numeroſæ Algebræ ſcriptoribus intelliguntur, ſed eas propoſitiones, vel nulli, vel ſolis ſpecioſæ Algebræ ſcriptoribus intelligibilem ſenſum habere.

Verum quidquid ſit de ſenſu illo myſterioſo atque ſolis Algebræ ſpecioſæ ſcriptoribus reſeruato, in quo intelligi poſſunt prædictæ propoſitiones; placet ex ipſis illis propoſitionibus aliam doctrinam inferre, planè repugnantem fundamentis antiquioris atque ſolidioris Geometriæ. Supponantur igitur veræ, illæ duæ propoſitiones quas conſiderandas ſuſcepimus, quaſque nunquam veras, ſed tantum legitime demonſtratas negauimus. Quoniam ex prima propoſitione -2 *in* $2 = -4$, & tamen -2 *in* 2 non $= 4$: etiam -4 non $= 4$; ergo -2 non $= 2$: ergo -2, eſt aliquid maius, vel aliquid minus quam 2. Præterea iuxta ſecundam propoſitionem -2 *in* $-2 = 2$ *in* 2: ergo iuxta Euclidis prop. 19. lib. 7. etiam -2 *ad* $2 = 2$ *ad* -2:

ergo antecedens, nimirum minus duo, ad conſequens duo: habet eamdem rationem, quam habet antecedens duo, ad conſequens nimirum minus duo: ſed iam oſtendimus minus duo eſſe aliquid maius, vel certè aliquid minus quam duo; ergo antecedens maius conſequente, ad ſuum conſequens: habet eamdem rationem, quam antecedens quod eſt minus conſequente, habet ad ſuum conſequens. Noua profectò atque Euclidi, Archimedi, alijſque antiquioribus Geometris prorſus incognita doctrina: ex qua vlterius ſequeretur.

Primò. Dari poſſe duas rationes quarum vna ſit ratio maioris inæqualitatis, hoc eſt ratio in qua antecedens eſt maius conſequente: altera ſit ratio minoris inæqualitatis, hoc eſt ratio in qua antecedens eſt minus conſequente: ità tamen vt iſtæ duæ rationes ſint æquales inter ſe. Tales enim rationes forent -2 *ad* 2 & 2 *ad* -2; atque ſingulæ binæ rationes quarum termini non aliter inter ſe differunt, quam quod vnius rationis, ſolus antecedens terminus: alterius rationis, ſolus conſequens terminus, ſigno $-$ afficiatur.

Secundo. Dari poſſe quatuor terminos diſcretim proportionales ſic vt ſinguli extremi termini ſint maiores ſingulis medijs terminis. Tales enim termini erunt ſubſequentes quatuor, quorum primus ſit -2, ſecundus 2, tertius 2, quartus -2; vel certè quatuor ſubſequentes quorum primus ſit 2, ſecundus -2, tertius -2, quartus 2; ac prætereа tales erunt ſinguli quatuor termini qui non aliter inter ſe differunt, quam quod ſoli duo extremi, vel ſoli duo medij, afficiantur ſigno $-$.

Tertiò. Quoniam rectangulum ſub extremis æquatur

rectan-

rectangulo ſub medijs, & quatuor proportionalium terminorum ſinguli extremi poſſunt eſſe maiores ſingulis medijs: etiam rectangulum ſub duabus lineis maioribus, poterit eſſe æquale rectangulo ſub duabus lineis minoribus.

Denique ruit, & falſa eſſe conuincitur, vniuerſa de proportionibus doctrina ab antiquioribus Geometris tradita, atque communiter adhibita, etiam ab ipſo authore noſtro, & præſuppoſita in ſua Matheſi, reuera maximè vniuerſali: quippe quæ longo interuallo prætergreſſa limites cuiuſuis alterius Matheſcos, aut ſcientiæ vllo vnquam tempore traditæ: intelligibilia, & non intelligibilia, vera & falſa, contraria & contradictoria ſimul amplecti, atque inter ſe conciliare conuincitur: ſi concedatur, ab eius authore legitimè demonſtrata eſſe, propria ac præcipua quibus innititur fundamenta: atque erronea non eſſe hactenus allata a nobis argumenta.

Ad plura pronum calamum cohibeo: ſatis enim multa notaui circa citatas abs te propoſitiones; immo ex his amplius aliquid intuli, quam mihi probandum erat; proderunt tamen paulò fuſius a me notata; vt non tantum intelligas quis inter partes contrarias aberret, ſed præterea facile aduertas, quanti momenti error ſit, atque commodè inferas defectus demonſtrationum, quæ pro commemoratis duabus propoſitionibus afferuntur a quibuſdam alijs Algebræ ſcriptoribus; quamquam non immeritò ſuſpicari poſſum in illis etiam tibi minime ſatisfactum eſſe: quandoquidem a te ſilentio inuoluantur; eaſdemque tibi proponere, aut ſeorſim conſiderare planè ſuperfluum duxi. Denique ſi forte ex allatis argumentis aliqua tibi videantur aduerſari, in Logiſtica

iſtica mea traditæ doctrinæ: in qua etiam ſtatuitur — ductum in † producere —: & præterea — ductum in — producere †; rogatum te velim, vt reflectas ad ſignificationem quam in mea Logiſtica habent ſigna † & —; quæ ſignificatio, planè diuerſa eſt ab illa quam habent apud Carteſium; deinde paulò attentius perlegendo fundamenta, ex quibus in idea meæ Logiſticæ deducuntur, atque demonſtrantur, prædictæ duæ propoſitiones: non difficulter aduertes, mihi nullatenus aduerſari, quæ hactenus a me allata ſunt contra doctrinam abs te indicatam, atque tuo iudicio legitimam: ſed niſi ego fallor, planè erroneam. Vale

EPISTOLA SECVNDA

AEGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis Ieſu.

D. GRIMALDO DE NOBILIBVS. S.



Ateor, virorum in Algebra verſatorum, diuerſas Epiſtolas ad me delatas, teſtari: non ab alijs vſitatum, ſed mihi proprium eſſe modum ſoluendi æquationes compoſitas, de quo agitur in quarta parte Epiſtolæ, quæ comitatur priores libros meæ Logiſticæ; cur igitur inquis, non ſtas promiſſis, & rei tuæ ad te ſpectantem curam ſuſcipiendo, problema non proponis ac demonſtras ſub ea vniuerſalitate, quam inſinuas ipſi conuenire? hæ ſunt expoſtulationes tuæ. Verum

rum te ipsum testem appello: quoties huius problematis necessitas sese obtulit tibi, qui & in Arithmetica & in Geometria; tam multa atque maximè ardua superasti: & ex his quam plurima exornasti nouis demonstrationibus propositis stylo vsitato in mea logistica? certè si hæc necessitas parua, & planè infrequens; repræhendi non debeo, si vtilioribus exponendis occupatus, hactenus neglexi cultum quem requirebat rudi modo propositum problema. Verum vt tibi obtemperem, mitto problema sub ea quam indicaui vniuersalitate propositum, solutum, atque demonstratum. Tu inquire aliud simile, pro æquationibus in quibus tres numeri denominati diuersum denominatorem habentes, æquantur alicui numero cognito; vel saltem demonstratas remitte, nonnullas alias ex compositarum æquationum resolutionibus; quas superba, sed reuera pauper Algebra, iam pridem in lucem edere potuit, hactenus tamen requisitis demonstrationibus dotare non potuit.

Nota primo. Iuxta nostram Logisticam, signa † & —, in quantum sunt characteres compositionis, æquiualent his vocibus *simul cum*: quibus vocibus ad longum scriptis vtor in aliquibus propositionibus, vt euadant magis vniuersales, atque amplectantur omnes casus, quorum diuersitas resultat ex eo, quod numeros denominatos atque compositos constituentes partes, sint numeri positiui vel negatiui.

Nota secundo. Quando numerus vulgaris repræsentatus per aliquam alphabeti litteram, indicat siue significat numeratorem aut denominatorem alicuius dignitatis: ipsa dignitas, maiuscula littera exprimitur: singulæ vero litteræ

repræ-

repræsentantes numeratorem aut denominatorem dignitatis, minuscula littera repræsentantur; cæterum eadem littera, siue maiuscula siue minuscula repræsentetur semper eumdem numerum significat. Denique, *o*, semper hic repræsentat characterem oppositionis.

Propositio I.

Singulæ litteræ, d, e, g, m, n, repræsentent vulgares numeros: duo tamen numeri m & n, sint integri: atque numerus m sit duplus numeri n. Denique d A n *simul cum* e A m æquetur numero G.

Dico primo. e A n *simul cum* g A *o* n ≒ D; ac præterea numerum D, esse aggregatum numerorum e A n & g A *o* n: si in data æquatione numeri e A m & G, dissimilibus signis afficiantur. Vel numerum D, esse differentiam numerorum e A n & g A *o* n: si in data æquatione numeri e A m & G, similibus signis afficiantur.

Dico secundo. e A n *in* g A *o* n ≒ G *in* E.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim d A n *simul cum* e A m ≒ G: sed quoniam per hypotesim denominator m est duplus denominatoris n, patet, e A m ≒ e A n *in* A n: ergo d A n *simul cum* e A n *in* A n ≒ G: ergo singula huius æquationis membra diuidendo per eumdem numerum A n, etiam $\frac{d\ A\ n}{A\ n}$ *simul cum* $\frac{e\ A\ n\ in\ A\ n}{A\ n}$ ≒ $\frac{G}{A\ n}$; sed $\frac{d\ A\ n}{A\ n}$ ≒ D item $\frac{e\ A\ n\ in\ A\ n}{A\ n}$ ≒ e A n: item $\frac{G}{A\ n}$ ≒ g A *o* n: ergo, D *simul cum* e A n ≒ g A *o* n: ergo e A n *simul cum* g A *o* n ≒ D: quodque in hac vltima æquatione numeri e A n & g A *o* n, conueniant quo ad signa + vel −, si in data æquatione numeri

meri e A m & G differant quo ad signa † vel —; aut è contra, quod in hac vltima æquatione numeri e A n & g A o n different quo ad signa † vel —, si in data æquatione numeri e A m & G, conueniant quo ad signa † vel —: sed si in vltima æquatione numeri e A n & g A o n, conueniant quo ad signa † vel —, manifestum est, numerum D esse aggregatum numerorum e A n & g A o n: & similiter si in vltima æquatione numeri e A n & g A o n, differant quo ad signa † vel —, patet numerum D esse differentiam numerorum e A n & g A o n: igitur e A n *simul cum* g A o n = D, & præterea numerus D est aggregatum numerorum e A n & g A o n, si in data æquatione numeri e A m & G differant quo ad signa † vel —; aut è contra numerus D, est differentia numerorum e A n & g A o n, si in data æquatione numeri e A m & G, conueniant quo ad signa † vel —. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Ex ipsa terminorum intelligentia patet, quod e A n *ad* E = A n *ad* 1: sed etiam A n *ad* 1 = 1 *ad* A o n: ergo e A n *ad* E = 1 *ad* A o n: atqui etiam 1 *ad* A o n = G *ad* g A o n: ergo e A n *ad* E = G *ad* g A o n: ergo per axioma 3 partis 4. ideæ e A n *in* g A o n = G *in* E. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio II.

Qualescunque sint numeri X *et* Z, quorum differentia sit D, atque X *in* 4 Z *et* † D 2 = P.

Dico radicem primam numeri P, æqualem esse aggregato numerorum X & Z.

Constructio $X - Z = D$: quod supponi posse immediatè patet ex ipsa hypothesi.

Demonstratio. Per theor. 1. appendicis lib. 2. Logisticæ. $X + Z\,q = X - Z\,q$ *et* $+ X$ *in* $4\,Z$: sed quia per constructionem $X - Z = D$, etiam $X - Z\,q = D\,2$: ergo $X + Z\,q = D\,2$ & $+ X$ *in* $4\,Z$: sed per hypothesim, $D\,2$ *et* $+$ *in* $X\,4\,Z = P$: ergo $X + Z\,q = P$: ergo $X + Z = R\,1 * P$: ergo $R\,1 * P$ = aggregato numerorum X & Z. Quod erat demonstrandum.

Propositio III.

Sint qualescunque numèri X & Z, quorum aggrègatum sit D, atque $D\,2$ *et* $- X$ *in* $4\,Z = P$.

Dico radicem primam numeri P, æqualem esse differentiæ numerorum X & Z.

Constructio. Scriptio $X - Z$, exhibeat differentiam numerorum X & Z: quod supponi posse, manifestum est ex ipsa hypothesi.

Demonstratio. Per hypothesim $D = X + Z$: ergo $D\,2 = X + Z\,q$: sed per theor. 1. appendicis lib. 2. Logisticæ $X + Z\,q = X\,2 + Z\,2$ *et* $+ X$ *in* $2\,Z$: ergo $D\,2 = X\,2 + Z\,2$ *et* $+ X$ *in* $2\,Z$: ergo $D\,2$ *et* $- X$ *in* $2\,Z = X\,2 + Z\,2$: sed quia per theor. 1. appendicis lib. 2. Logisticæ, etiam $X - Z\,q = X\,2 + Z\,2$ *et* $- X$ *in* $2\,Z$, patet $X - Z\,q$ *et* $+ X$ *in* $2\,Z = X\,2 + Z\,2$: ergo $D\,2$ *et* $- X$ *in* $2\,Z = X - Z\,q$ *et* $+ X$ *in* $2\,Z$; ergo per antithesim patet $D\,2$ *et* $- X$ *in* $4\,Z = X - Z\,q$: sed per hypothesim $D\,2$ *et* $- X$ *in* $4\,Z = P$: ergo $P = X - Z\,q$: ergo $R\,1 * P = X - Z$: ergo $R\,1 * P$ = differentiæ

ferentiæ numerorum X & Z. Quod erat demonstrandum.

Problema.

PRoposita sit quæcunque æquatio composita atque consistens inter aliquem numerum cognitum, & duos numeros denominatos, quibuscunque signis affectos : ità tamen, vt duo isti numeri denominati habeant eamdem dignitatem : ac præterea vnius numeri denominator, sit duplus denominatoris alterius numeri denominati. Siue supposito quod sint duo numeri denominati d A n & e A m, in quibus litteræ d & e repræsentent indeterminatè quoslibet duos numeratores expressos numeris vulgaribus : & præterea litteræ, n & m, repræsentent eorumdem denominatorum numerorum denominatores, ità tamen vt denominator m sit duplo maior denominatore n: denique d A n *simul cum* e A m = cognito numero G : qualiacunque tandem signa sint, quibus afficiuntur numeri constituentes æquationem.

Oporteat resoluere propositam æquationem ; siue inuenire valorem singulorum numerorum denominatorum d A n & e A m.

Solutio. Si in proposita æquatione, numeri e A m & G, similibus signis afficiantur : inueniatur numerus P, qui sit aggregatum numerorum D 2 & G *in* 4 E. Verum si in proposita æquatione, numeri e A m & G, dissimilibus signis afficiantur inueniatur numerus P, qui sit differentia numerorum D 2 & G *in* 4 E. Deinde inueniantur duo

 nume-

numeri X & Z, ita vt numerus X sit æqualis dimidio aggregati duorum numerorum, quorum vnus sit R 1 * P, alter sit D: atque eorumdem duorum numerorum differentiæ æqualis sit numerus Z. Tertio inuentis, vt dictum est numeris X & Z, verum erit quod vni ex his duobus numeris X vel Z, æqualis erit, numerus denominatus e A n: adeoque cognito valore numeri denominati e A n, ex dictis cap. 6. lib. 1. Logisticæ, patet quomodo inueniri possit valor singulorum numerorum d A n & e A m: quorum valor erat inueniendus.

Nota primo. Numerus denominatus e A n, quem diximus æqualem esse vni ex duobus numeris X & Z, constat ex numeratore qui conuenit numero denominato in æquatione proposito, habenti maiorem denominatorem: atque ex minori denominatore, & communi dignitati duorum numerorum denominatorum qui in proposita æquatione inueniuntur.

Nota secundo. Si inuentus, vt dictum est numerus P, vulgaris sit, atque per appendicem lib. primi Logisticæ, inueniri possit eius valor: commodum erit hunc valorem prius inuenire, atque substituere loco R 1 * P. Verum si per praxim in dicta appendice traditam inueniri non possit radix prima numeri P: etiam numeris vulgaribus exponi non poterit valor numeri denominati e A n: atque hoc casu ad vlteriorem problematis solutionem vltra dicta cap. 6. lib. 1. Logisticæ, requiri potest aliquid spectans ad modum inueniendi vnum numerum radicalem æquiualentem pluribus, signis + vel −, aut particulis *in* vel *per* connexis: de quo agimus in consideratione numerorum incommensurabilium.

Nota

Nota tertio. In quolibet caſu, certo ſtatui non poteſt, quis ex inuentis numeris X & Z, æqualis ſit numero denominato e A n: neque etiam illud neceſſarium eſt pro intenta problematis ſolutione: pro qua abunde ſufficit, quod conſtet vnum ex duobus inuentis numeris X vel Z, æqualem eſſe numero denominato e A n; ſi enim ſupponendo quod exempli gratia e A n = X, per dicta cap. 6. lib. 1. Logiſticæ inueniendo valorem duorum numerorum denominatorum qui in vna æquationis parte inueniuntur, habeatur numerus æqualis illi, qui inuenitur in altera propoſitæ æquationis parte; iam certum erit e A n = X. Si vero hoc modo non inueniatur numerus æqualis illi, qui in altera propoſitæ æquationis parte inuenitur, tunc certum erit e A n = Z.

Nota quarto. Diximus in quolibet caſu certò ſtatui non poſſe quis ex numeris X & Z, æquetur numero denominato e A n; ſi placet hos caſus ſcire, & intelligere quid de ſingulis verum ſit: aduerte, quod ſi in propoſita æquatione d A n *ſimul cum* e A m = G: numerus G cognitus, qui in vna parte inuenitur, non ſit poſitiuus: ex antitheſi patet quod non vitiabitur æquatio ſi numerus G fiat poſitiuus, dummodo ſinguli reliqui numeri d A n & e A m fiant negatiui ſi fuerint poſitiui; vel fiant poſitiui ſi fuerint negatiui, iam vero ſuppoſito quod numerus G, hoc eſt numerus cognitus qui inuenitur in vna parte propoſitæ æquationis, ſit poſitiuus: adhuc tres diuerſi caſus poſſunt occurrere; quorum primus eſt, vt ſinguli numeri denominati d A n & e A m ſint poſitiui. Secundus caſus eſt, vt numerus e A m habens maiorem denominatorem ſit poſitiuus, & alter numerus

merus d A n habens minorem denominatorem ſit negatiuus. Tertius caſus eſt ſi numerus e A m habens maiorem denominatorem ſit negatiuus, & alter d A n habens minorem denominatorem ſit poſitiuus. In primo caſu numerus e A n æquatur minori ex numeris X & Z. In ſecundo caſu numerus e A n æquatur maiori ex numeris X & Z. In tertio caſu, ex ijs quæ in propoſito problemate ſupponuntur cognita, non poteſt certo ſtatui, cui ex numeri X & Z æquetur numerus e A n.

Propoſiti problematis ſolutio a nobis allata, duos habet caſus: in primo numeri e A m & G afficiuntur ſignis ſimilibus. In ſecundo caſu, ijdem illi numeri e A m & G afficiuntur ſignis diſſimilibus; claritatis gratia in ſingulis caſibus ſeorſim demonſtro problematis reſolutionem.

Demonſtratur ſolutio in primo caſu. Per hypotheſim d A m *ſimul cum* e A m = G, & inſuper numeri e A m & G habent ſigna ſimilia: ergo per primam propoſitionem, etiam e A n *ſimul cum* g A *o* n = D, & inſuper D eſt differentia numerorum e A n *et* g A *o* n: ſed etiam per primam propoſitionem e A n *in* g A *o* n = G *in* E: ergo cum per hypotheſim P = D 2 *et* + G *in* 4 E, etiam per ſecundam propoſitionem R 1 * P = aggregato numerorum e A n *et* g A *o* n; igitur per theor. 1. propoſitum pagina 89 Logiſticæ aggregatum numerorum $\frac{R\,1 * P}{2}$ *et* $\frac{D}{2}$ hoc eſt numerus X, æquatur maiori ex numeris e A n *et* g A *o* n, earumdemque numerorum minori, æquatur differentia numerorum $\frac{R\,1 * P}{2}$ & $\frac{D}{2}$ hoc eſt numerus Z: ergo numerus e A n æquatur vni ex numeris X vel Z. Vt dicitur in ſolutione problematis in primo caſu; atq; ex his patet reliqua ſolutio.

Demon-

Demonſtratur ſolutio in ſecundo caſu. Per hypotheſim d A *n ſimul cum* e A m = G, & inſuper numeri e A m & G habent ſigna diſſimilia: ergo per primam propoſitionem, etiam e A n *ſimul cum* g A *o* n = D, & inſuper D eſt aggregatum numerorum e A n & g A *o* n: ſed per primam propoſitionem, etiam e A n *in* g A *o* n = G *in* E: ergo cum per hypotheſim P = D 2 *et* † G *in* 4 E, etiam per tertiam propoſitionem R 1 * P = differentiæ numerorum e A n & g A *o* n: igitur per theor. 1. propoſitum pagina 89. Logiſticæ, aggregatum numerorum $\frac{R\,1\,*\,P}{2}$ & $\frac{D}{2}$, hoc eſt numerus X æquatur maiori ex numeris e A n & g A *o* n, eorumdemque numerorum minori, æquatur differentia numerorum $\frac{R\,1\,*\,P}{2}$ & $\frac{D}{2}$, hoc eſt numerus Z ergo numerus e A n æquatur numero X vel numero Z. Vt dicitur in ſolutione problematis in ſecundo caſu; atque ex his iterum manifeſta eſt reliqua ſolutio: & demonſtratur quod erat propoſitum.

Placet hic addere pauca aliqua exempla propoſiti problematis, in quibus tamen non perueniatur ad numeros radicales, quorum valor exponi non poteſt per vulgares numeros.

Primo. Propoſita ſit æquatio in qua 5 A 2 † 6 A 1 = 63. quoniam numeri 5 A 2 & 63, ſimilibus ſignis afficiuntur: inueniendum eſt aggregatum ex numero 6 ducto in ſe, & ex numeris 63, 5, 4 ſimul multiplicatis: hoc eſt aggregatum ex numero 36 & 1260; quod aggregatum erit numerus 1296; huius aggregati radix prima eſt 36; quare numerus denominatus 5 A 1 = vni ex duobus numeris $\frac{36}{2}$ † $\frac{6}{2}$ vel $\frac{36}{2}$ − $\frac{6}{2}$, hoc eſt vni ex duobus numeris 21 vel 15; & licet iuxta notam 3. certum ſit quod numerus denominatus

5 A 1

5 A 1 æquetur minori ex inuentis duobus numeris 21. *et* 15, hoc est numero 15: tamen neglecta hac nota, atque supposito quod $5\,A\,1 = 15$, infero $6\,A\,1 = 18$, & præterea $1\,A\,1 = 3$: adeoque $1\,A\,2 = 9$: ex quo patet $5\,A\,2 = 45$, ac denique $5\,A\,2 + 6\,A\,1 = 45 + 18 \doteq 63$; quod quia etiam verum est iuxta propositam æquationem, constat $5\,A\,2 = 45$: & $6\,A\,1 = 18$. Si suppositum fuisset quod $5\,A\,1 = 21$: sequitur $6\,A\,1 = \frac{126}{5}$, ac præterea $1\,A\,1 = \frac{21}{5}$: adeoque $1\,A\,2 = \frac{441}{25}$: ex quo infertur $5\,A\,2 = \frac{2205}{25}$: ac denique $5\,A\,2 + 6\,A\,1 = \frac{2205}{25} + \frac{126}{5} \doteq 113\frac{10}{25}$; quod verum non est iuxta propositam æquationem: adeoque falsa est suppositio assumpta nimirum, quod 5 A 1 æquetur maiori ex numeris 21 & 15: adeoq; constat $5\,A\,1 = 15$. Vt prius suppositum fuerat.

Secundo. Proposita sit æquatio in qua $8\,A\,1 - 2\,A\,2 = 6$, quoniam numeri 2 A 2 & 6 dissimilibus signis afficiuntur, inuenienda est differentia duorum numerorum quorum vnus sit 8 ductum in se, alter sit productum ex numeris 6, 2, 4, simul multiplicatis: hoc est differentia numerorum 64 & 48: quæ differentia est numerus 16: huius numeri radix prima est 4: quare numerus denominatus 2 A 1 æquatur vni ex duobus numeris $\frac{8}{2} + \frac{4}{2}$ vel $\frac{8}{2} - \frac{4}{2}$, hoc est vni ex numeris 6 vel 2. Iam vero supposito quod $2\,A\,1 = 6$: infero, ergo $8\,A\,1 = 24$, & præterea $1\,A\,1 = 3$, adeoque $1\,A\,2 = 9$, item $2\,A\,2 = 18$, ac denique $8\,A\,1 - 2\,A\,2 = 24 - 18 \doteq 6$; quod quia etiam verum est iuxta propositam æquationem, constat $8\,A\,1 = 24$, & etiàm $2\,A\,2 = 18$.

Tertio. Proposita æquatio sit, $4\,A\,6 + 5\,A\,3 = 296$.

igitur

igitur quia 4 A 6 & 296 ſimilibus ſignis afficiuntur, inueniendum eſt aggregatum ex duobus numeris quorum vnus eſt numerus 5 ductus in ſe, hoc eſt 25: alter vero eſt productum ex numeris 296, 4, 4, ſimul multiplicatis: hoc eſt 4736; atque aggregatum numerorum 25 & 4736, erit numerus 4761; cuius prima radix eſt 69; quare numerus denominatus 4 A 3 æquatur vni ex duobus numeris $\frac{69}{2}$ + $\frac{5}{2}$ vel $\frac{69}{2}$ − $\frac{5}{2}$, hoc eſt vni ex numeris 37 vel 32. iam vero ſuppoſito quod 4 A 3 = 32: infero, igitur 5 A 3 = 40, & 1 A 3 = 8, adeoque 1 A 6 = 64: ex quo patet 4 A 6 = 256, ac denique 4 A 6 + 5 A 3 = 256 + 40 = 296; quod quia etiam verum eſt iuxta propoſitam æquationem, conſtat 4 A 6 = 256, & 5 A 3 = 40.

Quarto. Propoſita æquatio ſit, 3 A 6 − 5 A 3 = 152. igitur quia 3 A 6 & 152 ſimilibus ſignis afficiuntur, inueniendum eſt aggregatum ex duobus numeris, quorum vnus eſt numerus 5 ductus in ſe, hoc eſt numerus 25: alter vero eſt productum ex numeris 152, 3, 4, ſimul multiplicatis: hoc eſt 1824; iam vero aggregatum numerorum 25 & 1824 eſt numerus 1849, cuius prima radix eſt numerus 43: quare numerus denominatus 3 A 3 æquatur vni ex duobus numeris $\frac{43}{2}$ + $\frac{5}{2}$ vel $\frac{43}{2}$ − $\frac{5}{2}$, hoc eſt vni ex duobus numeris 29 vel 24; iam vero ſuppoſito quod 3 A 3 = 24: infero, ergo 5 A 3 = 40, & præterea 1 A 3 = 8: adeoque 1 A 9 = 64; ex quo patet, quod 3 A 6 = 192, ac denique 3 A 6 − 5 A 3 = 192 − 40 = 152: quod quia verum eſt iuxta propoſitam æquationem, patet 3 A 6 = 192, & etiam 5 A 3 = 40.

EPISTOLA TERTIA

AEGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis Iesu.

D. FRANCISCO MARTINO VESPIGNIANO. S.



Etierunt alij, quod à me petis: verum tibi, cui me tot titulis obstrictum intelligo, rescribere non possum, quod alijs rescripsi. Scio quidem quod à pluribus mihi concessam, facile à te impetrarem veniam, differendi eius quod petis: malo tamen statim obtemperare: tum ne tuo studendi ardori exiguum hoc alimentum subtraham: tum etiam vt ex ipsa obtemperandi prumptitudine intelligas, quantum desiderem satisfacere, ingeniosæ atque laudabili curiositati tuæ.

Modus componendi formulas, quibus in appendice libri primi nostræ Logisticæ vtimur, ad inueniendam quamlibet radicem proximam, cuiusuis propositi vulgaris numeri.

NOta primo, hoc loco, productum ex numero denominato aliquoties in se ducto, dici maximè simplex: quãdo est reuocatum ad sola membra inter se dissimilia.

Nota secundo, productum maximè simplex, censeri ordinatum: quando singula membra ex quibus constat, ità sunt disposita, vt illud in quo inuenitur dignitas A, cum apposito

appoſito maximo denominatore, præcedat: ſiue primum locum teneat; ac præterea ex reliquis membris, illa minus diſtent à primo membro, quæ continent dignitatem A, cum appoſito maiori denominatore; denique vltimum locum teneat, membrum, in quo non inuenitur dignitas A, ſed ſola dignitas B.

Vt habeatur deſiderata quælibet formula. Primo inueniatur maximè ſimplex, atque ordinatum productum, quod oritur ex numero denominato A † B toties in ſe ducto, quot vnitates continentur denominatore radicis pro cuius inuentione petitur formula. Secundo, in inuento maxime ſimplici, atque ordinato producto, primum membrum deleatur: atque ſingulis numeratoribus dignitatum A, quæ in reliquis membris inueniuntur, tot cifræ apponantur, quot alia membra ſubſequuntur. Sic enim habebitur quæſita formula.

Exempli gratia. Si petitur formula pro inuenienda radice prima; hoc eſt, pro radice quæ pro denominatore habet vnitatem. Primò, quia productum maximè ſimplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B ſemel ducto in ſe, eſt A 2 *et* † 2 A *in* B *et* † B 2: in hoc producto delendo primum membrum, quod eſt A 2: remanebit 2 A *in* B *et* † B 2; denique numeratoribus dignitatum A, apponendo tot cifras, quot membra ſubſequuntur: habebitur ſcriptio 20 A *in* B *et* † B 2; quæ erit formula quæſita pro inuenienda prima radice.

Rurſus. Si petatur formula pro inuenienda radice ſecunda; hoc eſt, pro radice cuius denominator eſt 2. Primò, quia productum maximè ſimplex, atque ordinatum, quod

oritur ex numero denominato A † B bis ducto in seipsum, est A 3 *et* † 3 A 2 *in* B *et* † 3 A *in* B 2 *et* † B 3; in hoc producto delendo primum membrum quod est A 3, remanebit 3 A 2 *in* B *et* † 3 A *in* B 2 *et* † B 3 : denique numeratoribus dignitatum A, apponendo tot cifras, quot membra subsequuntur, habebitur scriptio 300 A 2 *in* B *et* † 30 A *in* B 2 *et* † B 3 : quæ erit formula quæsita pro inuenienda radice secunda.

Similiter. Si petatur formula pro inuenienda radice tertia; hoc est, pro radice quæ pro denominatore habet 3. Primò, quia productum maximè simplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B, tertio ducto in seipsum, est A 4 *et* † 4 A 3 *in* B *et* † 6 A 2 *in* B 2 *et* † 4 A *in* B 3 *et* † B 4 : in hoc producto delendo primum membrum, quod est A 4; remanebit 4 A 3 *in* B *et* † 6 a 2 *in* B 2 *et* † 4 A *in* B 3 *et* † B 4; denique numeratoribus dignitatum A, apponendo tot cifras, quot membra subsequuntur, habebitur scriptio, 4000 A 3 *in* B *et* † 600 A 2 *in* B 2 *et* † 40 A *in* B 3 *et* † B 4, quæ erit formula quæsita pro inuenienda radice tertia.

Notantur aliqua, pro commoda inuentione producti maximè simplicis atque ordinati, quod oritur ex numero denominato A † B aliquoties in se ducto.

Vt commodius inueniatur productum maximè simplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B aliquoties in se ducto : sufficiunt quidem quæ libro primo nostræ Logisticæ traduntur cap. 2. de multiplicatione vniuersali & cap. 3. problemate primo vel 3. de modo, quo membra similia signo †, vel particula *in*, connexa, reuocentur

centur ad vnum ipsis æquiualens; non erit tamen inutile praxim obseruare, quæ in vulgarium numerorum multiplicatione adhibetur, vt immediatè sibi successiue subscripta inueniantur membra similia: quæ praxis talis esse potest. Primò, ipsius multiplicationis, superiori genitori inferior genitor A + B subscribatur, atque interpositæ lineæ, immediatè subscribatur productum vniuersale, quod oritur ex inferioris genitoris prima littera A, ducta in totum superiorem genitorem; deinde huic producto partiali, immediatè subscribatur productum vniuersale, quod oritur ex inferioris genitoris secunda littera B, ducta in totum superiorem genitorem: hoc tamen secundum productum partiale ita priori subscribatur, vt primum huius secundi atque partialis producti membrum, infernè respondeat, secundo membro primi atque partialis producti; sic enim fiet, vt similia membra similibus subscripta inuenientur in primo atque secundo vniuersali atque partiali producto; quare commode inueniri poterit productum totale atque ordinatum; illud enim habebitur, eo ipso quod (infra lineam duo producta partialia a producto totali separantem) describentur membra solitariè posita, vt in productis partialibus inueniuntur; & pro membris non solitariè positis, hoc est pro duobus membris sibi deorsum correspondentibus in productis partialibus, in producto totali substituatur vnum ambobus simul æquiualens. Ità in prima multiplicatione in qua superior genitor C, inferior genitor D (qui in reliquis multiplicationibus semper idem est) primum productum partiale erit E; secundum productum partiale erit F. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum erit G. Rursus,

pro

pro secunda multiplicatione, superior genitor erit G, inferior D. Primum productum partiale erit H: secundum productum partiale erit K. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum, erit L. Rursus pro tertia multiplicatione superior genitor erit L, inferior genitor erit D. Primum productum partiale erit M: Secundum productum partiale erit N. Productum totale maximè simplex atque ordinatum erit P. Denuo pro quarta multiplicatione genitor superior erit P, genitor inferior erit D. Primum productum partiale erit Q, secundum productum partiale erit R. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum erit S.

C.	A † B
D.	A † B
E.	A 2 *es* † A *in* B
F.	A *in* B *es* † B 2
G.	A 2 *es* † 2 A *in* B *es* † B 2
D.	A † B
H.	A 3 *es* † 2 A 2 *in* B *es* † A *in* B 2
K.	A 2 *in* B *es* † 2 A *in* B 2 *es* † B 3
L.	A 3 *es* † 3 A 2 *in* B *es* † 3 A *in* B 2 *es* † B 3
D.	A † B
M.	A 4 *es* † 3 A 3 *in* B *es* † 3 A 2 *in* B 2 *es* † A *in* B 3
N.	A 3 *in* B *es* † 3 A 2 *in* B 2 *es* † 3 A *in* B 3 *es* † B 4
P.	A 4 *es* † 4 A 3 *in* B *es* † 6 A 2 *in* B 2 *es* † 4 A *in* B 3 *es* † B 4
D.	A † B
Q.	A 5 *es* † 4 A 4 *in* B *es* † 6 A 3 *in* B 2 *es* † 4 A 2 *in* B 3 *es* † A *in* B 4
R.	A 4 *in* B *es* † 4 A 3 *in* B 2 *es* † 6 A 2 *in* B 3 *es* † 4 A *in* B 4 *es* † B 5
S	A 5 *es* † 5 A 4 *in* B *es* † 10 A 3 *in* B 2 *es* † 10 A 2 *in* B 3 *es* † 5 A *in* B 4 *es* † B 5

EPISTOLA QVARTA

ÆGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis Iesu.

D. FRANCISCO ZECCADORO. S.



Aucis quidem petis, ſed non pauca; ſcribis optare te videre, quomodo Logiſtica mea tractet materiam de quantitatibus incommenſurabilibus, inter cæteras, ſubtilitate atque pulchritudine nulli ſecundam. En tota petitio tua quam ad me mittis. Quid remittam? Profectò nihil poſſum remittere quo tibi fiat ſatis, vel pro Epiſtola volumen debeo remittere; voluminis moles atque prolixitas parum decet Epiſtolam, etiamſi imitando Plinium lib. 5. Epiſt. 6. Apollinari, tandem illam concluderem, dicendo, non Epiſtola quæ deſcribit, ſed materia quæ deſcribitur magna eſt. Quid igitur: ieiunium permittam tam laudabilem appetitum tuum; & cui in Mathematicis vix vlla melius ſapiunt quam mea: negabo aliquid meum? Quid hoc aliud foret quam proficiendi ardori tuo aquam affundere, cui hactenus igniculos addere conatus ſum, vt quam maximè excreſceret? Ne ex hoc capite, aut tibi vllo modo iniurius, aut mihi parum conſtans videar, mitto Epiſtolæ accluſum, quod non capit Epiſtola. Vnum te rogatum velim, vt notes atque ad me remittas, quidquid inter legendum aduerteris minus bene poſitum; ſic enim hæc, materia, contra ſuum

meritum

meritum hactenus apud alios satis inculta, quæque secundi Ideæ Logisticæ libri pars est, decentius exornata atque exculta, melius implebit locum suum.

De Commensurabilibus, & incommensurabilibus quantitatibus.

Definitiones.

I. NVmerus vulgaris dicitur simplex; quando constat ex vnico numeratore, & vnico denominatore: Nota numeros vulgares 1, 2, 3, 20, 100 &c. constare ex vnico numeratore atque vnico denominatore; quoties enim numeratori expressè appositus non est aliquis denominator: pro denominatore habet vnitatem; quem denominatorem vel expressè ponere, vel omittere atque sub audire, integrum est: hinc fit quod $1 = \frac{1}{1}$: item $2 = \frac{2}{1}$: item $20 = \frac{20}{1}$: eadem lex passim à nobis adhibetur, etiam circa numeros denominatos & radicales.

II. Numerus vulgaris dicitur compositus, siue non simplex: si non constet ex vnico numeratore, & vnico denominatore. Exempli gratia numeri vulgares 2, 1, 7, 10, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{50}{110}$, singuli sunt vulgares simplices. Verum sequentes numeri vulgares $4 + 2$, $6 - 3$, $\frac{6 \text{ in } 2}{7}$, $\frac{2 \text{ in } 3}{4 \text{ in } 6}$, singuli sunt compositi.

III. Numerus vulgaris simplex, dicitur integer: si non habeat expressè appositum denominatorem. Exempli gratia singuli numeri vulgares 4, 7, 1, 8, 15, 147, sunt integri.

IV. Nu-

IV. Numerus vulgaris ſimplex, dicitur fractus, ſiue non integer: quando expreſsè appoſitum habet denominatorem. Exempli gratia ſinguli numeri vulgares $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{25}$; ſunt vulgares fracti. Similiter vulgares fracti ſunt 2 *per* 4, 7 *per* 4, 3 *per* 1, vt patet ex ipſa expoſitione ſcriptionis qua vtimur in Logiſtica noſtra; hinc in Arithmetica introductione ad Logiſticam fractum numerum definimus pag. 46. dicendo, fractus vulgaris numerus dici poteſt, numerus vulgaris habens reſtrictionem dependentem à diuiſione.

V. Numerus vulgaris fractus, dicitur æquari, ſiuè æquiualere integro: quando dari poteſt integer vulgaris æquiualens ipſi fracto. Exempli gratia fractus numerus 14 *per* 2 æquiualet integro: quia 14 *per* 2 = 7.

VI. Numerus vulgaris fractus, dicitur non æquiualere integro: quando dàri non poteſt integer æqualis ipſi fracto. Exempli gratia numerus fractus $\frac{2}{4}$ non æquiualet integro. Similiter fractus numerus $\frac{7}{2}$ non æquiualet integro.

VII. Numerus vulgaris A, dicitur pars aliquota numeri vulgaris B: quando numerus A eſt integer, & aliquoties ſumptus præcisè adæquat numerum B. Siue quod idem eſt, quando dari poteſt integer vulgaris C, ità vt A *in* C = B. Hinc quia 3 & 12 ſinguli ſunt integri, & præterea datur integer 4, ità vt 3 *in* 4 = 12: etiam numerus 3 eſt pars aliquota numeri 12.

VIII. Numerus vulgaris A, dicitur pars aliquanta numeri vulgaris B: quando numerus A non eſt maior numero B, ſed tamen numerus A vel non eſt integer, vel aliquoties ſumptus non adæquat numerum B; ſiue quod idem

est, quando vel A non est integer, vel non est possibilis integer C, ità vt A *in* C = B. Hinc numerus 3, est pars aliquanta numeri 10. Item numerus $\frac{2}{3}$, est pars aliquanta numeri $\frac{2}{3}$.

IX. Vulgaris numerus A, dicitur metiri vulgarem numerum B: si numerus A est pars aliquota numeri B. Verum vulgaris numerus A dicitur non metiri vulgarem numerum B: si numerus A non est pars aliquota numeri B. Denique vulgaris numerus A, dicitur mensura numeri B: si numerus A metitur numerum B.

X. Duæ eiusdem generis quantitates A & B, dicuntur inter se commensurabiles: quando dari possunt duo vulgares numeri integri aut fracti, qui habeant eamdem proportionem quam quantitas A, habet ad quantitatem B. Similiter duæ quantitates A & B dicuntur inter se incommensurabiles, quando dari non possunt duo numeri vulgares integri aut fracti, qui habeant eamdem proportionem, quam quantitas A habet ad quantitatem B.

Axiomata.

I. QVod metitur mensuram, etiam metitur mensuratum à tali mensura.

II. Quod metitur singulos genitores additionis vel subtractionis, etiam metitur productum ex ipsa additione vel subtractione. Hinc si A metitur B & C, etiam A metitur B + C: & etiam A metitur B − C.

III. Quando singuli genitores multiplicationis sunt numeri vulgares integri, etiam singuli genitores metiuntur

tiuntur productum ex multiplicatione.

Hinc quia numeri vulgares 4 & 3 ſinguli ſunt integri, & præterea 3 *in* 4 = 12: ſinguli numeri 4 & 3 metiuntur numerum 12.

IV. Quando ſinguli genitores diuiſionis ſunt numeri vulgares integri, & inſuper productum ex diuiſione eſt numerus vulgaris integer: tam diuiſor quam numerus productus ex diuiſione, ſinguli metiuntur numerum qui diuiditur.

Hinc quia 12 *per* 4 = 3: ſinguli numeri 4 & 3, ſunt menſuræ, numeri 12.

Propoſitio I.

Singulæ litteræ A & B, ſignificent vulgarem integrum numerum: atque numerus A ſit maior numero B. Deinde diuidendo A per B, producatur integer F, atque pro reſiduo remaneat integer C. Rurſus priorem diuiſorem B diuidendo per inuentum reſiduum C producatur integer numerus G, atque pro reſiduo remaneat integer numerus D. Denique, hoc ordine, in diuiſione adhibitum diuiſorem, diuidendo per reſiduum eiuſdem diuiſionis, continuentur diuiſiones, donec nullum remaneat reſiduum: atque diuiſor huius diuiſionis ex qua nullum remanet reſiduum ſit vulgaris integer Z.

Dico, numerorum A & B, maximam communem menſuram eſſe numerum Z.

Conſtructio. Numerorum A & B maxima communis menſura ſit X.

Vt ex hac constructione propositam veritatem clarius inferam: primo ostendo numerum X metiri singula diuisionum residua, inter quæ per hypothesim inuenitur Z, atque adeo numerum X metiri numerum Z: ex quo patet numerum X, non esse maiorem numero Z. Deinde probo numerum X non esse minorem numero Z. Denique ex eo quod numerus X non sit maior, neque minor numero Z: infero numerum X æquari numero Z: & cum numerus X per constructionem sit maxima mensura numerorum A & B, concludo etiam numerum Z esse maximam mensuram numerorum A & B.

Demonstratio. Numerum A diuidendo per numerum B, producatur integer F: atque residuus integer sit C; igitur $\frac{A}{B} - C = F$: ergo $A - C = F$ *in* B: sed per constructionem X metitur B, adeoque per 3. axioma, X metitur B *in* F: ergo X metitur $A - C$: sed etiam per constructionem, X metitur A: ergo, per secundum axioma, X metitur C. Rursus numerum B diuidendo per numerum C, producatur integer G: & residuus integer sit D; igitur $\frac{B}{C} - D = G$: ergo $B - D = G$ *in* C: sed iam ostensum est, X metiri C, adeoque per 3 axioma, X metitur G *in* C: ergo X metitur $B - D$: sed, per constructionem, etiam X metitur B: ergo per 2 axioma, X metitur D. Rursus, C, diuidendo per D, producatur integer K: & residuus sit integer E; igitur $\frac{C}{D} - E = K$ ergo $C - E = K$ *in* D: sed prius ostensũ est X metiri D, adeoq; per 2, axioma, X metitur K *in* D: ergo X metitur $C - E$: atqui etiam ostensum est X metiri C: ergo per 2. axioma, X metitur E. Eodem prorsus argumento per subsequentes quotcunque diuisiones, ex quibus

relinqui-

relinquitur reſiduum, oſtenditur, numerum X neceſſario metiri illud reſiduum; quoniam vero ex hypotheſi manifeſtum eſt, inter hæc reſidua inueniri numerum Z: etiam patet numerum X metiri numerum Z, adeoque numerum X non eſſe maiorem numero Z. Reliquum igitur eſt, vt oſtendam numerum X non eſſe minorem numero Z. Itaq; poſt hactenus propoſitas diuiſiones, ex quibus ſingulis relinquitur reſiduum, immediatè ſuccedat illa ex qua nullum relinquitur reſiduum: atque D diuidendo per E, producatur integer L, & nullum relinquatur reſiduum; quo poſito, per hypotheſim patet numerum E, æquari numero Z: Quoniam igitur $\frac{D}{E} = L$; per 4. axioma, E metitur D: ſed $Z = E$: ergo Z metitur D: ergo, per 3. axioma, Z metitur D *in* K: atqui D *in* $K = C - E = C - Z$: ergo Z metitur $C - Z$: ſed Z etiam metitur ſeipſum, hoc eſt Z: ergo, per 2. axioma, Z metitur C: ergo, per 3. axioma, Z metitur G *in* C: ſed G *in* $C = B - D$: ergo Z metitur $B - D$: ſed iam oſtenſum eſt, etiam Z metiri D: ergo, per 2. axioma, Z metitur B: ergo, per 3. axioma, Z metitur B *in* F: ſed B *in* $F = A - C$: ergo, Z metitur $A - C$: atqui etiam oſtenſum eſt Z metiri C: ergo, per 2. axioma, Z metitur A: igitur cum Z metiatur B, & etiam Z metiatur A: patet Z eſſe communem menſuram A & B: ſed per conſtructionem X eſt maxima menſura A & B: ergo numerus Z non eſt maior numero X: ſed prius oſtenſum eſt, numerum Z non eſſe minorem numero X: ergo numerus Z æquatur numero X: atqui, per conſtructionem, numerus X eſt maxima menſura numerorum A & B: ergo etiam Z eſt maxima menſura numerorum A & B. Quod erat demonſtrandum.

Corol-

Corollarium.

HInc patet quod maxima mensura communis numerorum A & B erit vnitas, adeoque numeros A & B non habere pro mensura communi numerum integrum vnitate maiorem: si numerus $Z = 1$; hoc est, si in præscripto diuisionum ordine, prima diuisio occurrens, ex qua nullum remanet residuum, habeat pro diuisore vnitatem; & similiter quod maxima mensura communis numerorum A & B, erit numerus integer maior vnitate: adeoque numeros A & B pro mensura communi habere numerum integrum vnitate maiorem: si Z æquetur numero diuerso ab vnitate: hoc est, si in præscripto diuisionum ordine, prima diuisio ex qua nullum remanet residuum, habeat pro diuisore numerum diuersum ab vnitate.

Propositio II.

SIngulæ litteræ A, B, C, D, repræsentent integros vulgares numeros, præterea A *ad* B = C *ad* D, atque A sit minor C.

Dico primò, proportionem A *ad* B non constare minimis terminis integris, si A non metitur C.

Dico secundò, A metiri C, & B metiri D: si proportio A *ad* B constet minimis integris terminis.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim A non metitur C & tamen A est minor C: igitur diuidendo C per A producitur aliquis integer numerus E, & pro residuo relinquitur

quitur alius integer numerus F, qui sit minor diuisore A: adeoque $\frac{C}{A} = E + \frac{F}{A}$, & singuli numeri E & F integri sunt, atque F est minor quam A. Rursus quoniam per hypothesim A *ad* B $=$ C *ad* D, permutando etiam A *ad* C $=$ B *ad* D: sed per hypothesim A est minor quam C, & tamen A non metitur C: ergo etiam B est minor quam D, & tamen B non metitur D: sed quoniam A *ad* C $=$ B *ad* D, etiam patet $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$; adeoque diuidendo D per B, habetur pro quotiente integer numerus E; & pro residuo relinquitur aliquis integer numerus K, qui sit minor diuisore B: igitur $\frac{D}{B} = E + \frac{K}{B}$, & singuli numeri E & K sunt integri, atque K est minor quam B. Quandoquidem igitur ostensum sit $\frac{C}{A} = E + \frac{F}{A}$, & etiam $\frac{B}{D} = E + \frac{K}{B}$, atque etiam ostensum sit $\frac{C}{A} = \frac{B}{D}$: patet etiam $E + \frac{F}{A} = E + \frac{K}{B}$: ergo vtrinque auferendo eumdem numerum E, etiam $\frac{F}{A} = \frac{K}{B}$: ergo A *ad* F $=$ B *ad* K: ergo permutando A *ad* B $=$ F *ad* K: atqui prius ostensum est, numerum F esse integrum, & minorem numero A: item numerum K esse integrum, atque minorem numero B: ergo proportio A *ad* B $=$ F *ad* K: & tamen proportio F *ad* K constat minoribus terminis integris, quam proportio A *ad* B: ergo proportio A *ad* B non constat minimis integris terminis. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Si A non metiretur C, per primam partem, proportio A *ad* B non constaret minimis terminis integris: sed per hypothesim, proportio A *ad* B constat minimis integris terminis: ergo A metitur C. Quoniam vero per hypothesim A *ad* B $=$ C *ad* D, etiam permutando, A *ad* C $=$ B *ad* D: sed iam ostensum est, A meti-

tiri

tiri C: ergo etiam B metitur D: igitur A metitur C, & insuper B metitur D. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio III.

Singulæ litteræ A & B integros vulgares numeros repræsentent.

Dico primò, proportionem A *ad* B constare minimis integris terminis: si A et B non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Dico secundò, proportionem A *ad* B non constare minimis integris terminis: si A & B habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Demonstratur prima pars. Sit enim proportio F *ad* K integris, atque minimis terminis expressa: ita vt F *ad* K = A *ad* B; igitur per 2. propositionem, F metitur A, adeoque $\frac{A}{F}$ = integro numero X: sed quoniam F *ad* K = A *ad* B, etiam permutando, F *ad* A = K *ad* B, adeoque $\frac{A}{F} = \frac{B}{K}$: ergo $\frac{B}{K}$ = eidem integro X: ergo per 4. axioma numerus X metitur A & B: sed per hypothesim A & B non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo X = 1: ergo $\frac{A}{F}$ = 1, item $\frac{B}{K}$ = 1: ergo A = F, item B = K: sed proportio F *ad* K est expressa minimis integris terminis: ergo etiam proportio A *ad* B est expressa minimis integris terminis. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim A & B habent communem mensuram diuersam ab vnitate: sit igitur talis mensura X: ergo $\frac{A}{X}$ = integro F, item $\frac{B}{X}$ = integro K: ergo A = F *in* X, item B = K *in* X: ergo 1 *ad*

X =

X $=$ F *ad* A, item 1 *ad* X $=$ K *ad* B : ergo F *ad* A $=$ K *ad* B : ergo permutando F *ad* K $=$ A *ad* B : sed quoniam ostensum est $\frac{A}{X} = F$, per 4 axioma, F metitur A: ergo per præcedentem propositionem, proportio A *ad* B non constat minimis terminis. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio IV.

Singulæ litteræ A & B repræsentent integros numeros, quorum maxima communis mensura sit Z: atque $\frac{A}{Z} = F$, item $\frac{B}{Z} = K$.

Dico, proportionem F *ad* K esse expressam minimis terminis, atque F *ad* K $=$ A *ad* B.

Demonstratio. Per hypothesim Z est maxima mensura A & B : ergo qualemcunque integrum numerum ab vnitate diuersum repræsentet X, tamen Z *in* X erit maior quam Z: adeoque Z *in* X non est mensura A & B : ergo $\frac{A}{Z \, in \, X}$ non $=$ integro, vel $\frac{B}{Z \, in \, X}$ non $=$ integro : sed $\frac{A}{Z \, in \, X} = \frac{A}{Z}$ *per* X : item $\frac{B}{Z \, in \, X} = \frac{B}{Z}$ *per* X. ergo $\frac{A}{Z}$ *per* X non $=$ integro, vel $\frac{B}{Z}$ *per* X non $=$ integro : sed per hypothesim $\frac{A}{Z} = F$, item $\frac{B}{Z} = K$: ergo F *per* X non $=$ integro, vel K *per* X non $=$ integro : ergo X non metitur F & K : sed X est quilibet numerus integer diuersus ab vnitate : ergo nullus numerus integer diuersus ab vnitate, metitur F & K : ergo F et K non habent communem mensuram diuersam ab vnitate : ergo, per 3. propositionem, proportio F *ad* K est expressa minimis terminis atque (vt patet ex hypothesi & coroll. theor. 4. partis 4. ideæ Logisticæ) F *ad* K $=$ A *ad* B. Quod erat probandum.

Propositio V.

Singulæ litteræ, A, B, C, repræsentent integros vulgares numeros.

Dico primò, A *in* B et C, habere communem mensuram diuersam ab vnitate: si C et A, vel C et B, habeant talem mensuram communem.

Dico secundò, A *in* B et C; non habere mensuram communem diuersam ab vnitate: si neque C et A, neque C et B, habeant talem mensuram communem.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim singuli numeri A et B sunt integri: ergo per axioma 3 singuli numeri A et B metiuntur A *in* B: atqui per hypothesim C et A, vel C et B habent aliquam mensuram X communem diuersam ab vnitate, adeoque C et A, vel C et B mensurantur à numero X: ergo aliquis numerus A vel B, mensurans numerum A *in* B, mensuratur à numero X: ergo, per primum axioma, numerus A *in* B mensuratur à numero X: ergo numeri A *in* B & C, habent communem mensuram X: sed numerus X est diuersus ab vnitate, ergo numeri A *in* B & C, habent mensuram communem diuersam ab vnitate. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Facta suppositione quod litt era X indeterminate significet quamlibet mensuram nume iC, diuersam ab vnitate; quandoquidem per suppositionem X metitur C, per axioma primum, quilibet numerus qui metitur X, etiam metitur C: sed quoniam per hypothesim C & A non habent communem mensuram diuersam

ſam ab vnitate, nullus numerus diuerſus ab vnitate, atque menſurans numerum C, metitur numerum A: ergo nullus numerus diuerſus ab vnitate, atque menſurans numerum X, metitur numerum A: ergo numeri X & A non habent menſuram communem diuerſam ab vnitate: ergo per propoſitionem 3. proportio X ad A eſt expreſſa minimis terminis integris: ergo ſi X eſſet menſura numeri A *in* B, etiam $\frac{A\ in\ B}{X}$ æquaretur alicui integro numero F, adeoque X *ad* A = B *ad* F, & conſequenter per prop. 2. etiam X metietur B: ſed (quoniam per ſuppoſitionem X metitur C, & per hypotheſim C & B non habent menſuram communem) patet X non metiri B: ergo X non metitur A *in B*: atqui per ſuppoſitionem X eſt quælibet menſura numeri C, diuerſa ab vnitate: ergo de qualibet menſura numeri C diuerſa ab vnitate, verum eſt, quod non metiatur A *in* B: ergo numeri A *in* B & C, non habent menſuram communem diuerſam ab vnitate. Vt aſſeritur in ſecunda parte.

Animi gratia, placet hic apponere diſcurſum à præcedente aliquantulum diuerſum, quo inferri poteſt eadem ſecunda pars. Vel numerus integer C habet menſuram diuerſam ab vnitate, atque communem cum numero integro A, aut cum numero integro B: vel non habet talem menſuram: neque eſt poſſibilis aliquis caſus ab his duobus diuerſus; ſed in primo caſu, per primam partem, numeri A *in* B & C, habent communem menſuram diuerſam ab vnitate, & inſuper manifeſtum eſt in aliquo caſu poſſibili numeros A *in* B & C non habere communem menſuram diuerſam ab vnitate: ergo in ſecundo caſu numeri A *in* B & C, non habent menſuram communem diuerſam ab vni-

tate: ergo numeri A *in* B & C, non habent mensuram communem diuersam ab vnitate, si neque C & A, neque C & B, habeant mensuram communem diuersam ab vnitate. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio VI.

Singulæ litteræ A, B, C, repræsentent vulgares integros numeros.

Dico primò, C metiri A *in* B: si C metiatur A aut B, vel certè C *ad* A *in* B $=$ 1 *ad* aliquem integrum numerum.

Dico secundò, C non metiri A *in* B: si C non metiatur A, aut B, neque etiam C *ad* A *in* B $=$ 1 *ad* aliquem integrum numerum.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim, vel C metitur A aut B: vel certe C *ad* A *in* B $=$ 1 *ad* integrum: in primo casu, quia per 3. axioma, singuli numeri A & B metiuntur A *in* B, & per hypothesim numerus C metitur A vel B: etiam per primum axioma, C metitur A *in* B. In secundo casu, quia per hypothesim C *ad* A *in* B $=$ 1 *ad* aliquem integrum, patet $\frac{A \textit{ in } B}{C}$ $=$ alicui integro, adeoque per 4. axioma, C metitur A *in* B. Quare in vtroque casu primæ assertionis, constat C metiri A *in* B. Vt dicitur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Quoniam per hypothesim, C non metitur A, & tamen numerus A integer est, patet numerum C esse diuersum ab vnitate. Iam vero, integer numerus C atq; diuersus ab vnitate, vel cum nullo ex duobus numeris A & B habet mensurā cōmunem diuersam ab vnitate,

tate, vel certe cum aliquo ex duobus numeris A & B habet menſuram communem diuerſam ab vnitate. In primo caſu quoniam C eſt integer numerus diuerſus ab vnitate, & cum nullo ex numeris A & B habet menſuram communem diuerſam ab vnitate, per propoſitionem præcedentem C & A *in* B non habent menſuram communem diuerſam ab vnitate: ſed integer C diuerſus ab vnitate metitur ſeipſum: ergo integer C non metitur A *in* B. In ſecundo caſu, quoniam C & A vel B habent menſuram diuerſam ab vnitate, per propoſitionem præcedentem; etiam C & A *in* B habent menſuram communem diuerſam ab vnitate: itaque talis maxima menſura ſit Z: igitur $\frac{C}{Z}$ = alicui integro F: item $\frac{A\ in\ B}{Z}$ = alicui integro K, atque per 4. prop. F *ad* K = C *ad* A *in* B, eritque proportio F *ad* K expreſſa minimis terminis, adeoque per 3. prop. F & K non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate: ſed quia etiam per hypotheſim C *ad* A *in* B non = 1 *ad* aliquem integrum, patet proportionis F *ad* K antecedentem terminum F non = 1, ſed eſſe numerum integrum diuerſum ab vnitate: igitur F *ad* K = C *ad* A *in* B, & tamen F non metitur K: ergo etiam C non metitur A *in* B. Vt aſſeritur in ſecunda parte.

Corollarium.

Hinc facile patet, quod ſi dentur duo numeri vulgares ſimplices, quorum vnus A ſit integer, alter $\frac{B}{C}$ ſit fractus ſimplex; patet inquam productum ex integro A ducto in fractum $\frac{B}{C}$, æquiualere integro numero: ſi vel fracti

numeri

numeri denominator C, metiatur suum numeratorem B, aut integrum numerum A: vel certè denominator C, sit maxima mensura communis, numeratoris atque denominatoris producti ex integro numero A ducto in fractum $\frac{B}{C}$; & rursum productum ex integro numero A ducto in fractum $\frac{B}{C}$, non æquiualere integro numero: si neque fracti numeri denominator C, metiatur suum numeratorem B, aut integrum A: neque etiam denominator C sit maxima mensura communis, numeratoris atque denominatoris producti ex integro A ducto in fractum $\frac{B}{C}$.

Etenim si C metitur A vel B, per primam partem propositæ propositionis, C metitur A *in* B, adeoque per 4. axioma, $\frac{A\ in\ B}{C} =$ integro. Si vero C est maxima mensura numerorum C & A *in* B patet $\frac{C}{C} = 1$: & per 4. axioma, $\frac{A\ in\ B}{C} =$ integro X: igitur 1 *ad* X $= \frac{C}{C}$ *ad* $\frac{A\ in\ B}{C}$, sed $\frac{C}{C}$ *ad* $\frac{A\ in\ B}{C} =$ C *ad* A *in* B: ergo C *ad* A *in* B $=$ 1 *ad* integrũ X: ergo per primã partẽ propositæ propositionis, C metitur A *in* B: ergo per 4. axioma, $\frac{A\ in\ B}{C} =$ integro. Præterea, si neque C metiatur A vel B, neque C sit maxima mensura C & A *in* B quoniam C non est maxima mensura C & A *in* B, diuidendo A *in* B per numerum C, relinquitur aliquod residuum: atque adeo productum non est integer numerus aliquis X: ergo C *ad* A *in* B non $=$ 1 *ad* integrum numerum: sed etiam per hypothesim C non metitur A vel B: ergo per secundam partem propositæ propositionis, $\frac{A\ in\ B}{C}$ non æquiualet integro numero.

Propo-

Propoſitio VII.

Singulæ litteræ A & B, vulgares integros numeros repræſentent: præterea littera n ſignificet aliquem denominatorem apponibilem dignitatibus A vel B.

Dico primò, A & B n, præterea A n & B n, habere menſuram communem diuerſam ab vnitate: ſi A & B habeant talem menſuram.

Dico ſecundo, neque A & B n, neque A n et B n, habere menſuram diuerſam ab vnitate: ſi A et B non habeant talem menſuram.

Demonſtratur prima pars primæ aſſertionis. Per hypotheſim A et B habent menſuram diuerſam ab vnitate: ergo per prop. 5. etiam, B *in* B et A, hoc eſt B 2 et A, habent talem menſuram: ſed per hypotheſim, etiam A et B habent talem menſuram: ergo per prop. 5. etiam B 2 *in* B et A, hoc eſt B 3 et A, habent talem menſuram: atqui per hypotheſim, A et B etiam habent talem menſuram: ergo per prop. 5. etiam B 3 *in* B et A: hoc eſt B 4 et A habent talem menſuram. Simili planè argumento patet, B 5 et A, item B 6 et A, atque ita de cæteris dignitatibus B, quemcunque denominatorem habentibus, atque adeo B n et A, habere communem menſuram diuerſam ab vnitate. Vt dicitur in prima parte primæ aſſertionis.

Demonſtratur ſecunda pars, primæ aſſertionis. Per primam partem A et B 2, habent communem menſuram diuerſam ab vnitate: ergo per prop. 5. etiam A *in* A et B 2, hoc eſt A 2 et B 2 habent talem menſuram. Rurſus, quia

iam

iam constat A 2 et B 2 habere communem mensuram diuersam ab vnitate, per prop. 5. etiam A 2 *in* A et B 2, hoc est A 3 et B 2, habent talem mensuram communem: igitur per prop. 5. etiam A 3 et B 2 *in* B, hoc est A 3 et B 3, habent talem communem mensuram. Rursus, quia iam constat A 3 et B 3 habere communem mensuram diuersam ab vnitate, per prop. 5. etiam A 3 *in* A et B 3, hoc est A 4 et B 3, habent talem mensuram communem: igitur per prop. 5. etiam A 4 et B 3 *in* B, hoc est A 4 et B 4 habent talem mensuram communem. Simili planè argumento patet de reliquis dignitatibus A et B quemcunque, sed tamen eumdem denominatorem habentibus, quod habeant mensuram communem, diuersam ab vnitate: adeoque constat A n, et B n habere mensuram communem diuersam ab vnitate. Vt dicitur in secunda parte primæ assertionis.

Demonstratur prima pars, secundæ assertionis. Per hypothesim A et B non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per prop. 5. etiam A et B *in* B, hoc est A et B 2, non habent talem mensuram communem. Rursus quia iam constat A et B 2 non habere mensuram communem diuersam ab vnitate, et insuper per hypothesim A et B non habeat talem mensuram: per prop. 5. patet A et B 2 *in* B, hoc est A et B 3 non habere talem mensuram communem. Rursus, quoniam constat A et B 3 non habere mensuram communem diuersam ab vnitate, et insuper per hypothesim A et B non habent talem mensuram cōmunem, per prop. 5. patet A et B 3 *in* B, hoc est A et B 4 non habere talem mensuram. Simili plane argumento

patet

patet de reliquis numeris ſignificatis à dignitate B, cum appoſito quouis denominatore, inter quæ ſ B n: atque adeo conſtat A & B n, non habere menſuram communem diuerſam ab vnitate. Vt dicitur in prima parte ſecundæ aſſertionis.

Demonſtratio ſecundæ partis, ſecundæ aſſertionis. Per præcedentem partem A & B 2, non habent menſuram communem diuerſam ab vnitate: ergo per prop. 5. etiam A *in* A & B 2, hoc eſt A 2 & B 2, non habent talem menſuram communem. Ruſus quia iam conſtat A 2 & B 2 non habere menſuram cõmunem diuerſam ab vnitate, & inſuper per præcedentem partem, A & B 2 non habent talem menſuram: per prop. 5. patet A 2 *in* A & B 2, hoc eſt A 3 & B 2 non habere talem menſuram communem: ſed etiam per priorem partem A 3 & B, non habent talem menſuram communem: ergo per prop. 5. patet A 3 & B 2 *in* B, hoc A 3 & B 3 non habere talem menſuram communem. Rurſus, quoniam iam conſtat A 3 & B 3 non habere menſuram communem diuerſam ab vnitate, & inſuper per præcedentem partem A & B 3 non habent talem menſuram communem: per prop. 5. patet A 3 *in* A & B 3 hoc eſt A 4 & B 3 non habere talem menſuram communem: ſed per priorem partem etiam A 4 & B non habent talem communem menſuram: ergo per prop. 5. patet A 4 & B 3 *in* B, hoc eſt A 4 & B 4, non habere talem menſuram. Simili prorſus argumento patet de reliquis, hoc eſt de dignitatibus A & B, qualemcunque, ſed tamen eumdem denominatorem habentibus, quod non habeant communem menſuram diuerſam ab vnitate: adeoque A n & B n non habe-

re mensuram communem diuersam ab vnitate. Vt dicitur in secunda parte secundæ assertionis.

Propositio VIII.

Litteræ A & B, singulæ repræsentent vulgarem integrum numerum.

Dico primò, $\frac{A\,n}{B}$, & præterea $\frac{A\,n}{B\,n}$, æquari integro vulgari numero: si $\frac{A}{B}$ æquatur integro vulgari numero.

Dico secundò, neque $\frac{A\,n}{B}$ neque $\frac{A\,n}{B\,n}$ æquari integro vulgari numero: si $\frac{A}{B}$ non æquatur integro vulgari numero.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim $\frac{A}{B}$ = alicui vulgari integro E: ergo B *in* E = A ≏ A *in* 1: ergo 1 *ad* E = B *ad* A: ergo singulos harum proportionum terminos, toties in seipsos ducendo vt singuli habeant denominatorem n, etiam 1 *ad* E n = B n *ad* A n: sed quoniam E est integer vulgaris, patet 1 metiri E, & per 3. axioma, E metitur E n, adeoque per primum axioma, 1 metitur E n: ergo B n metitur A n: ergo $\frac{A\,n}{B\,n}$ = integro numero. Præterea, quia B n metitur A n, & per 3. axioma, B metitur B n: etiam per primum axioma, B metitur A n: ergo etiam $\frac{\;n}{B}$ = integro; igitur & $\frac{A\,n}{B}$ = integro, atque etiam $\frac{A\,n}{B\,n}$ = integro numero. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim B non metitur A: ergo per prop. 6. etiam B non metitur A *in* A hoc est A 2: igitur B neque metitur A neque metitur A 2: ergo per prop. 6. etiam B non metitur A *in* A 2 hoc est A 3: igitur B neque metitur A neque metitur A 3: ergo per 6. prop. B non metitur A *in* A 3, hoc est A 4. Eodem prorsus

discursu

diſcurſu patet B non metiri A 5, vel A 6, vel A 7 &c. adeoque B non metiri A n. Prætcrea quia B metitur B, per 3. axioma patet B metiri B n: igitur ſi B n metiretur A n per primum axioma etiam B metiretur A n: ſed iam oſtenſum eſt B non metiri A n: igitur B n non metitur A n: conſtat igitur neque B metiri A n, neque B n metiri A n, ſi B non metitur A: ergo neque $\frac{An}{B}$ neque $\frac{An}{Bn}$ æquatur integro vulgari numero, ſi $\frac{A}{B}$ non æquetur integro vulgari numero. Vt dicitur in ſecunda parte.

Corollarium.

EX ſecunda parte propoſitæ propoſitionis patet, quod nullus vulgaris numerus non æquiualens integro, ſemel aut ſæpius in ſe ductus, poſſit producere numerum æquiualentem vulgari integro. Qualiſcunque enim numerus vulgaris ſit K, qui non æquiualeat integro, manifeſtum eſt dari poſſe vulgarem fractionem ſimplicem $\frac{A}{B}$, ità vt $\frac{A}{B}$ = K: quodque etiam fractio $\frac{A}{B}$ non æquabitur vulgari integro, adeoque per ſecundam partem propoſitæ propoſitionis, $\frac{An}{Bn}$ non æquabitur vulgari integro: ſed $\frac{An}{Bn}$ nihil eſt aliud quam fractio $\frac{A}{B}$ ſemel, aut ſæpius in ſe ducta, ſiue numerus K ſemel, aut ſæpius in ſe ductus: ergo numerus K qui non æquiualet integro, etiam ſemel, aut ſæpius in ſe ductus non æquiualet integro.

Propositio IX.

Littera A repræsentet quemlibet numerum vulgarem integrum; ità tamen, vt R n * A, non æquetur vulgari integro numero,

Dico, R n * A, non esse exprimibilem vllo numero vulgari.

Constructio. R n * A = B.

Demonstratio. Per constructionem R n * A = B: ergo per hypothesim, B non = vulgari integro numero: sed quoniam per prop. 8. vel eius corollarium, nullus numerus vulgaris non æquiualens integro, semel aut sæpius in se ductus, producere potest numerum æquiualentem integro: tametsi per ipsam constructionem satis pateat quantitatem B, aliquoties in se ductam producere numerum A: patet quantitatem B non = numero vulgari fracto qui non æquiualeat vulgari integro: et tamen non est possibilis numerus vulgaris diuersus ab ijs qui æquiualēt, vel nō æquiualent integro: ergo B non æquatur vlli numero vulgari: sed per constructionem R n * A = B: ergo R n * A non æquatur vlli numero vulgari: ergo R n * A non est exprimibilis vllo numero vulgari. Quod erat demonstrandum.

Propositio X.

Quæuis proportio X *ad* Z expressa sit quibuscunque numeris vulgaribus, qui singuli integri non sint.

Dico,

Dico, poſſibiles eſſe duos numeros vulgares integros, habentes eamdem proportionem, quam X habet ad Z.

Nota, ex ipſo conceptu numerorum quos vulgares appellamus ſatis patere, omnes numeros vulgares compoſitos conſtare ex integris vulgaribus ſigno † aut —, vel certe particula *in* aut *per* connexis. Iam vero ex primis Logiſticæ noſtræ fundamentis manifeſtum eſt, quomodo huiuſmodi numeri compoſiti reuocari poſſint ad ſimplices ipſis æquiualentes: quare etiam patet dato cuiuis compoſito vulgari numero, æquiualentem vulgarem numerum ſimplicem, eſſe poſſibilem; & conſequenter in ſequenti conſtructione nihil ſupponimus quod non ſit manifeſtè poſſibile.

Conſtructio. $X = \frac{A}{F}$, prætarea $Z = \frac{B}{K}$, ſintque ſinguli numeri $\frac{A}{F}$ & $\frac{B}{K}$ vulgares ſimplices.

Demonſtratio. Per Corollarium theor. 4. partis 4. ideæ Logiſticæ, A *in* K *ad* F *in* K $=$ A *ad* F: ergo $\frac{A \text{ in } K}{F \text{ in } K} = \frac{A}{F}$. Similiter B *in* F *ad* K *in* F $=$ B *ad* K; ergo etiam, $\frac{B \text{ in } F}{K \text{ in } F} = \frac{B}{K}$. Igitur $\frac{A}{F}$ *ad* $\frac{B}{K} = \frac{A \text{ in } K}{F \text{ in } K}$, *ad* $\frac{B \text{ in } F}{F \text{ in } K}$: ſed per Corollarium theor. 4. partis 4. ideæ Logiſticæ etiam, $\frac{A \text{ in } K}{F \text{ in } K}$ *ad* $\frac{B \text{ in } F}{F \text{ in } K} =$ A *in* K *ad* B *in* F: ergo $\frac{A}{F}$ *ad* $\frac{B}{K} =$ A *in* K *ad* B *in* F: ſed quoniam per conſtructionem numeri $\frac{A}{F}$ & $\frac{B}{K}$ ſinguli ſunt ſimplices atque vulgares, patet ſingulos numeros A, B, F, K, eſſe vulgares integros, adeoque A *in* K $=$ alicui vulgari integro M, item B *in* F $=$ alicui vulgari integro N: ergo $\frac{A}{F}$ *ad* $\frac{B}{K}$ $=$ M *ad* N, atque proportio M *ad* N eſt expreſſa vulgaribus integris numeris: ſed quoniam per conſtructionem $X = \frac{A}{F}$, item $Z = \frac{B}{K}$, patet $\frac{A}{F}$ *ad* $\frac{B}{K}$ $=$ X *ad* Z: ergo etiam X *ad* Z $=$ M *ad* N, atque proportio M *ad* N eſt expreſſa integris vulgaribus numeris: patet igitur poſſibiles eſſe duos numeros vulgares

gares

gares integros, habentes eamdem proportionem quam numerus X habet ad numerum Z. Quod erat demonstrandum.

Propositio XI.

QValescunque quantitates repræsentent singulæ litteræ A, B, D; itâ tamen vt radix n, numeri D, non sit exprimibilis vllo numero vulgari: ac præterea Am = Bm *per* D: supposito quod denominator m, vnitate maior sit denominatore n; siue quod R n ∗ A m = A.

Dico proportionem A *ad* B exprimi non posse vllis numeris vulgaribus; adeoque quantitates A & B esse inter se incommensurabiles.

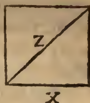
Constructio. A m *ad* B m = 1 *ad* C m:

Demonstratio. A m *ad* B m = 1 *ad* C m: sed quoniam per hypothesim A m = B m *per* D, patet A m *per* 1 = B m *per* D, adeoque A m *ad* 1 = B m *ad* D, & permutando A m *ad* B m = 1 *ad* D: ergo 1 *ad* C m = 1 *ad* D: ergo D = C m: ergo R n ∗ D = R n ∗ C m: atqui per hypothesim R n ∗ D, non est exprimibilis vllo vulgari numero: ergo R n ∗ C m, non est exprimibilis vllo vulgari numero: sed R n ∗ C m = C: ergo C non potest exprimi vllo vulgari numero: sed quoniam per constructionem A m *ad* B m = 1 *ad* C m: patet A *ad* B = 1 *ad* C: ergo ex quatuor terminis discretim proportionalibus A, B, 1, C, vltimus C non potest exprimi vllo vulgari numero, licet penultimus sit vulgaris numerus, nimirum vnitas vulgaris; sed quoties tres termini dati A, B, 1, singuli sunt vulgares numeri,

ex regula aurea patet inuenibilem eſſe quartum terminum proportionalem, qui ſit vulgaris numerus: ergo ex duobus terminis A et B conſtituentibus proportionem A *ad* B, aliquis non eſt exprimibilis vllo numero vulgari: ergo proportio A *ad* B non eſt exprimibilis vllis numeris vulgaribus. Quod erat demonſtrandum.

Propoſitio XII.

Eiuſdem quadrati latus et diameter, ſunt quantitates inter ſe incommenſurabiles. Siue ſuppoſito quod alicuius quadrati latus ſit X; atque eiuſdem quadrati diameter ſit Z: impoſſibile eſt dari duos numeros vulgares A et B; ità vt A *ad* B = X *ad* Z.



Demonſtratio: Per Theor. 4. cap. 3. partis 5. ideæ, patet 2 X 2 = Z 2: ergo X 2 = Z 2 *per* 2: ſed numerus 2 eſt integer, et tamen non habet radicem primam exprimibilem per numerum vulgarem integrum, vt ſatis patet: ergo per propoſ. 9. numerus integer 2, non habet radicem primam exprimibilem per vllum numerum vulgarem: ergo per propoſ. 11. proportio X *ad* Z exprimi non poteſt vllis numeris vulgaribus: ergo impoſſibile eſt dari duos numeros vulgares A et B, ità vt A *ad* B = X *ad* Z. Quod erat demonſtrandum.

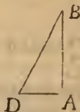
Pro-

Propositio XIII.

IN triangulo rectangulo D A B, recta D A *ad* A B = 1 *ad* 2.

Dico lineas D B et D A, esse incommensurabiles.

Demonstratio. Per theor. 4. cap. 3. partis 5. ideæ Logisticæ, D B 2 = DA2 † A B 2 : sed quia ex hypothesi D A *ad* A B = 1 *ad* 2, adeoque DA 2 *ad* A B 2 = 1 *ad* 4 : patet AB2 = 4 D A 2 : ergo D B 2 = 5DA2: ergo D A 2 = D B 2 *per* 5: sed quoniam numerus 5 integer est, et satis patet quod non habeat radicem primam exprimibilem per numerum vulgarem integrum, etiam per prop. 9. numerus 5 non habet radicem primam exprimibilem per vllum vulgarem numerum: ergo per prop. 11. impossibile est dari duos numeros vulgares E et F, ita vt E *ad* F = D B *ad* D A: ergo DB et DA sunt lineæ incommensurabiles. Quod erat demonstrandum.



Propositio XIV.

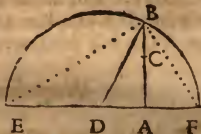
SIt triangulum rectangulum D A B, atque D A *ad* A B = 1 *ad* 2: præterea D B — D A = A C : sitque punctum C in recta A B.

Dico, A B *ad* A C = A C *ad* C B, adeoque rectam A B extrema et media ratione sectam esse in C.

Constructio. Centro D, interuallo D B, descriptus sit semi-

semicirculus, cui recta D A vtrinque occurrat, nimirum in punctis E & F: denique ductæ sint rectæ E B & F B.

Demonstratio. Ex constructione & theor. 6. partis 3. ideæ Logisticæ, patet angulum E B F rectum esse, ergo per theor. 10. partis 3. ideæ, E A *ad* A B = A B *ad* A F: ergo A B *in* A B = A E *in* A F: sed A B *in* A B = A B *in* A C *et* † A B *in* C B: ergo A B *in* A C *et* † A B *in* C B = A E *in* A F: sed ex hypothesi, & constructione satis patet A F = A C (quandoquidem D B = D F, & insuper D B − D A = A C, ac denique D F − D A = A F) ergo A B *in* A C *et* † A B *in* C B = A F *in* A C: atqui etiam E A = E D † D A ≏ D F † D A ≏ 2 D A † A F ≏ 2 D A † A C (quandoquidem per hypothesim D A *ad* A B = 1 *ad* 2, adeoque A B = 2 D A, & insuper ostensum sit A F = A C) ergo A B *in* A C *et* † A B *in* C B = A B † A C *in* A C ≏ A B *in* A C *et* † A C *in* A C: ergo vtrinque auferendo A B *in* A C, etiam A B *in* C B = A C *in* A C: ergo A B *ad* A C = A C *ad* C B. Quod erat demonstrandum.



Propositio XV.

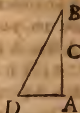
Recta linea A B extrema & media ratione secta sit in C.

Dico lineas A B & A C, esse incommensurabiles.

 Con-

Constructio. Factum sit triangulum rectangulum D A B, ita vt D A *ad* A B = 1 *ad* 2.

Demonstratio. Quoniam A B secta est in C extrema & media ratione, ex prop. 14. satis patet, D B − D A = A C; sed quoniam per prop. 13. etiam D B & D A sunt lineæ incommensurabiles, patet quod D B − D A sit incommensurabilis ipsi D A: ergo A C est incommensurabilis ipsi D A: ergo etiam A C & 2 D A sunt incommensurabiles: sed quia per hypothesim D A *ad* A B = 1 *ad* 2, patet A B = 2 D A: ergo A C & A B sunt lineæ incommensurabiles.



Propositio XVI.

Datus sit quiuis numerus vulgaris A B.

Dico numerum A B, diuidi non posse extrema & media ratione. Siue impossibile esse dari duos numeros vulgares A C & C B, ita vt A C + C B = A B, & præterea A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Demonstratio per hypothesim A B *ad* A C = A C *ad* C B, & insuper A C + C B = A B: ergo per prop. 15. quantitates A B & A C sunt incommensurabiles: ergo numeris vulgaribus exprimi non potest proportio A B *ad* A C: ergo impossibile est dari numeros vulgares A C & C B, itá vt A B *ad* A C = A C *ad* C B, & insuper A C + C B = A B. Quod erat demonstrandum.

Pro-

Propositio XVII.

SIt $\frac{X}{Z}$ quælibet fractio vulgaris simplex constans minimis terminis.

Dico singulos numeros integros X & Z habere radicem n, si possibilis sit aliqua fractio æquiualens fractioni $\frac{X}{Z}$, quæ habeat radicem n.

Nota. Littera n significat indeterminate quemlibet denominatorem numeri radicalis; præterea littera m, significat denominatorem numeri denominati qui vnitate maior sit denominatore n.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim possibilis est aliqua fractio habens radicem n, atque æquiualens fractioni $\frac{X}{Z}$: itaque talis fractio sit $\frac{A\,m}{B\,m}$; quo posito, vel A & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate, vel A & B habent communem mensuram diuersam ab vnitate. In primo casu quoniam A & B non habent mensuram communem diuersam ab vnitate per prop. 7. etiam A m & B m non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per prop. 3. etiam $\frac{A\,m}{B\,m}$ est fractio minimis terminis expressa: sed etiam per hypothesim $\frac{X}{Z}$ est fractio minimis terminis expressa, & insuper $\frac{A\,m}{B\,m} = \frac{X}{Z}$: ergo A m $=$ X, & etiam B m $=$ Z: sed R n * A m $=$ A, & etiam R n * B m $=$ B: ergo R n * X $=$ A, & etiam R n * Z $=$ B: ergo singuli numeri X & Z habent radicem n. In secundo casu. Per hypothesim numeri A & B habent communem mensuram, igitur maxima talis mensura sit P: præterea $\frac{A}{P} = K$, item $\frac{B}{P} = L$ igitur per prop. 4. proportio

K *ad* L est expressa minimis terminis, & præterea K *ad* L = A *ad* B: ergo per prop.3. numeri K & L non habent mensuram diuersam ab vnitate, adeoque per prop. 7. numeri K m & L m, non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per prop. 3. proportio K m *ad* L m est proportio minimis terminis expressa: ergo fractio $\frac{Km}{Lm}$, est fractio minimis terminis expressa: sed quoniam A *ad* B = K *ad* L, singulos harum proportionum terminos, toties ducendo in seipsos, quot vnitates continentur numero n, patet A m *ad* B m = K m *ad* L m, adeoque $\frac{Am}{Bm} = \frac{Km}{Lm}$: ergo $\frac{Am}{Bm} = \frac{Km}{Lm}$, & insuper fractio $\frac{Km}{Lm}$ est expressa minimis terminis: sed etiã $\frac{Am}{Bm} = \frac{X}{Z}$, & insuper fractio $\frac{X}{Z}$ est expressa minimis terminis: ergo $\frac{Km}{Lm} = \frac{X}{Z}$, & singulæ istæ fractiones sunt expressæ minimis terminis: igitur K m = X, & etiam L m = Z: sed R n * K m = K, & etiam R n * L m = L: ergo R n * X = K, & etiam R n * Z = L: ergo singuli numeri X & Z habent radicem n. Constat igitur quod singuli numeri X & Z habeant radicem n, si possibilis est aliqua fractio æquiualens fractioni $\frac{X}{Z}$ quæ habeat radicem n. Quod erat demonstrandum.

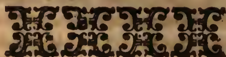
Propositio XVIII.

Singulæ litteræ A, B, C, D. Vulgares integros numeros repræsentent, ità tamen vt A *ad* B = C *ad* D; præterea proportio A *ad* B sit expressa minimis terminis. Denique numerus A vel numerus B non habeat radicem n.

Dico R n * C & R n * D, esse numeros radicales inter se incommensurabiles.

Demon-

Demonstratio. Per hypothesim A *ad* B = C *ad* D, & præterea proportio A *ad* B est expressa minimis terminis: ergo fractio $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, et insuper fractio $\frac{B}{A}$ est expressa minimis terminis: sed quia per hypothesim singuli numeri B et A non habent radicem n, per propositionem præcedentem, non est possibilis vlla fractio vulgaris simplex æquiualens fractioni $\frac{B}{A}$, cuius tam numerator quam denominator habeat radicem n: ergo non est possibilis vlla fractio vulgaris simplex atque æquiualens fractioni $\frac{D}{C}$, cuius tam numerator quam denominator habeat radicem n: ergo non est possibilis vlla fractio vulgaris simplex æquiualens fractioni radicali $\frac{R\,n * D}{R\,n * C}$: ergo non sunt possibiles duo numeri vulgares integri habentes eamdem proportionem quam R n * C habet *ad* R n * D: sed per prop. 10. non sunt possibiles duo vulgares numeri non integri, habentes proportionem aliquam quæ exprimi non possit integris vulgaribus numeris: ergo non sunt possibiles vlli duo numeri vulgares habentes proportionem quam R n * C habet *ad* R n * D: ergo per definitionem decimam, numeri radicales R n * C & R n * D, sunt incommensurabiles inter se. Quod erat demonstrandum.



EPIS-

EPISTOLA QVINTA

AEGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis Iesu.

D. PETRO PAVLO DE VECCHIS. S.



Audo ingenium tuum, laudo discendi ardorem: Verum quod tibi tantùm labores planè non laudo; etenim ex Logisticæ meæ studio, satis magnam facilitatem tibi comparasti in enodandis difficultatibus Mathematicis: atque efformandis demonstrationibus, quibus aut problematum solutiones ostenduntur legitimæ, aut theorematum veritates probantur infallibiles; qua igitur ex causa tibi tantum vacas, et nihil componis quod aliorum etiam bono vtile sit? at inquis, vt alijs, sic et mihi prescribe materiam parem viribus meis, quæque à me elaborata, pluribus possit prodesse: hoc à te responsum iam sæpius retuli; quam obrem mitto tibi problemata aliqua demonstrationibus destituta, vt quod in ipsis desideratur suppleas. Quam vtilitatem habeant hæc problemata, facile aduertes; scis enim quanti momenti sit in mea Logistica, vniuersalium operationum producta longiora, atque adeo minus commoda, reuocàre ad breuiora, quæ sint magis commoda atque prioribus æquiualeant; id quomodo fiat, quando producta vniuersalia, orta sunt ex numeris vulgaribus, vel numeris denominatis non differentibus quo ad dignitatem: paucis suffi-

ſufficienter expoſui, immediatè poſt ipſas operationes vniuerſales traditas in primo libro meæ Logiſticæ: plura enim de hac materia non videbantur conuenire accedentibus ad ſtudium meæ Logiſticæ, ad quos liber ille ſcriptus eſt. Verum in Idea eiuſdem Logiſticæ quam ſcripſi ad magis prouectos, poſt expoſitam ab ipſis fundamentis doctrinam de proportionibus, in fine partis quartæ, doceo, quomodo ad ſimpliciora ſed prioribus æquiualentia, reuocentur producta vniuerſalia, genita ex proportionibus; quodque libro primo Logiſticæ docui circa numeros vulgares aut denominatos: et in citato loco ideæ Logiſticæ trado circa proportiones: hæc ſubſequentia problemata docent circa numeros radicales.

Problema I.

Datus ſit quiuis vulgaris numerus X.

Oporteat inuenire vtrum datus numerus X, habeat datam radicem n: atque illam radicem n exhibere, ſuppoſito quod exprimi poſſit numero vulgari.

Solutio. Per Arithmeticam vulgarem inueniatur numerus $\frac{A}{B}$, qui ſimplex ſit, atque conſtet minimis terminis, ita tamen vt $\frac{A}{B} = X$: Deinde per Appendicem lib: 1. Logiſticæ quæratur radix n, numeri $\frac{A}{B}$; ſi hæc radix inueniri non poſsit, etiam verum erit quod radix n, numeri X, exprimi non poſsit numero vulgari; ſi vero hæc radix inueniatur, atque R n * $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, etiam R n * X $= \frac{C}{D}$.

Exempli Gratia datus numerus vulgaris ſi $\frac{16}{54}$; quæraturque an habeat radicem ſecundam. Numerus 16 *per* 54,

reductus

reductus adsimplicem atque constantem minimis terminis, erit 8 *per* 27; deinde R 2 * 27, est $\frac{3}{1}$; igitur R 2 * $\frac{16}{54}$, erit $\frac{2}{3}$. Rursus datus numerus sit $\frac{32}{54}$, quæraturque an habeat radicem secundam. Numerus 32 *per* 54, reductus ad simplicem constantem minimis terminis, erit 16 *per* 27: iam vero R 2 * $\frac{16}{27}$, inueniri non potest: quia licet radix secunda 27, sit 3, tamen radix secunda numeri 16 inueniri non potest iuxta dicta in Appendice lib. 1. Logisticæ; adeoque R 2 * $\frac{32}{34}$ non potest exprimi numeris vulgaribus.

Demonstratio patet ex prop. 17. de incommensurabilibus.

Problema II.

DAti sint duo numeri vulgares maior X, minor Z. Oporteat inter numeros X et Z, inuenire tot medios proportionales, quot vnitates indicantur à dato vulgari integro numero n, supposito quod tales medij proportionales sint possibiles, siue exprimibiles numeris vulgaribus.

Solutio: Per Arithmeticam vulgarem, fractio X *per* Z reuocata ad minimos terminos, sit A *per* B. Deinde per appendicem lib. 1. Logicæ, inueniatur radix, n, fractionis A *per* B: atq; hæc radix sit C *per* D; numerus Z ductus in numerũ C *per* D, dabit vnũ ex medijs proportionalibus quæsitis: nimirũ illũ, qui numero Z proximè maior est: atq; inuentus hic numerus, iterũ ductus in C *per* D, dabit alium proximè maiorem: qui iterum ductus in C *per* D dabit denuo alium se proxime maiorem; atque ità deinceps.

Exempli

Exempli Gratia, ſuppoſito quod dati numeri ſint 8 & 2; fractio 8 *per* 2 reuocata ad minimos terminos, erit 4 *per* 1, huius fractionis radix prima eſt 2 *per* 1. Quoniam vero 2 *in* $\frac{2}{1}$ = 4, etiam numerus 4 erit medius proportionalis quæſitus: eritque verum quod 2 *ad* 4 = 4 *ad* 8. Rurſus dati numeri ſint 4374 & 6, atque inter illos, quinque medij proportionales inueniri debeant; fractio 4374 *per* 6 reuocata ad minimos terminos, erit 729 *per* 1; huius fractionis radix quinta erit numerus 3 *per* 1; quoniam vero 6 *in* $\frac{3}{1}$ = 18, numerus 18 erit minor ex quæſitis medijs proportionalibus; item quia 18 *in* $\frac{3}{1}$ = 54, erit numerus 54 alter ex quæſitis medijs proportionalibus; ſimiliter quia 54 *in* $\frac{3}{1}$ = 162 hic erit tertius ex quæſitis medijs proportionalibus; rurſus quia 162 *in* $\frac{3}{1}$ = 486, hic erit quartus ex quæſitis medijs proportionalibus; denique quia 486 *in* $\frac{3}{1}$ = 1458, hic erit quintus ex quæſitis medijs proportionalibus; eritque verum, quod numeri, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374. ſint continuè proportionales.

Problema III.

Datus ſit quiuis numerus vulgaris X.

Oporteat inuenire numerum radicalem, qui habeat datum denominatorem, n, atque æquiualeat dato numero X.

Solutio. Datus vulgaris numerus X, toties in ſe ducatur, quot vnitates continentur dato denominatore n, quæſiti numeri radicalis. Deinde per factas multiplicationes pro-

ductus numerus vulgaris scribatur post asterismum, atque illi præponatur signum radicale cum dato denominatore n; sic enim habebitur quæsitus numerus radicalis.

Exempli Gratia datus vulgaris numerus sit 3, & denominator quæsiti radicalis numeri sit 2; quoniam numerus 3, bis ductus in se, producit numerum 27: etiam R 2 ✶ 27 = 3. Rursus supposito quod datus numerus sit $\frac{2}{3}$, & denominator quæsiti numeri radicalis sit 1; quoniam numerus $\frac{2}{3}$, semel ductus in se, producit $\frac{4}{9}$; etiam R 1 ✶ $\frac{4}{9}$ = $\frac{2}{3}$.

Problema IV.

Dati sint duo numeri radicales, habentes diuersum denominatorem.

Oporteat datos numeros radicales reuocare ad alios duos radicales numeros prioribus æquiualentes, atque habentes eumdem denominatorem.

Solutio. Primò datorum radicalium numerorum denominatores simul addantur, atque huic summæ addatur binarius, sic enim habebis nouum denominatorem qui charactéri radicali apponendus erit in vtroque numero radicali quæsito. Deinde numerus post asterismum scriptus in primo ex datis numeris radicalibus, toties in se ducatur, quot vnitates continet denominator dati secundi numeri radicalis: atque hoc productum erit numerus post asterismum scribendus in primo ex quæsitis numeris radicalibus. Similiter numerus post asterismum scriptus in secundo ex datis numeris radicalibus, toties in se ducatur, quot vnitates

continet

continet denominator dati primi numeri radicalis: atque hoc productum erit numerus post asterismum scribendus in secundo ex quæsitis numeris radicalibus.

Exempli gratia primus numerus radicalis datus sit R 1 ✱ 4. Secundus numerus radicalis datus sit R 2 ✱ 27; quo supposito. Denominatores datorum numerorum radicalium simul additi dabunt numerum 3, qui auctus binario dabit numerum 5, qui erit denominator pro vtroque numero radicali quæsito. Deinde, quia in primo numero radicali post asterismum scriptus numerus est 4, & denominator secundi numeri radicalis est 2: etiam numerus 4 bis ductus in se, hoc est numerus 64, erit numerus post asterismum scribendus, in primo quæsito numero radicali, qui erit R 5 ✱ 64: eritque verum quod R ✱ 5 64 = R 1 ✱ 4 Similiter quia in secundo numero radicali dato, post asterismum scriptus numerus est 27, & denominator primi dati radicalis numeri est 1, etiam numerus 27 semel ductus in se, hoc est numerus 729, erit numerus post asterismum scribendus in secundo quæsito numero radicali, qui erit R 5 ✱ 729: eritque verum quod R 5 ✱ 729 = R 2 ✱ 27.

Problema V.

Dati sint duo numeri radicales, habentes eumdem, siue communem denominatorem: atque vterque pro numeratore habeat vnitatem.

Oporteat inuenire, an sint commensurabiles: atque supposito quod commensurabiles sint, exhibere duos numeros

vulgares eamdem habentes proportionem quam habent dati radicales numeri.

Solutio. Ex duobus numeris scriptis post asterismum in datis numeris radicalibus, fiat fractio, deinde hæc fractio reuocetur ad numerum simplicem, atque constantem minimis terminis. Tertio per Appendicem lib. 1. Logisticæ, tam numeratoris, quam denominatoris inuenti simplicis numeri, radix illa inueniatur, quæ indicatur à communi denominatore datorum numerorum radicalium. Si singulæ istæ radices inueniri non possint, dati radicales numeri erunt incommensurabiles. Si singulæ istæ radices inueniri possint, dati radicales numeri erunt commensurabiles; atque maior ex inuentis radicibus ad minorem, habebit eamdem proportionem, quam habet datus maior radicalis numerus ad minorem.

Exempli Gratia. Ex datis radicalibus numeris, vnus sit R 1 * 18: alter sit R 1 * 8: fractio $\frac{18}{8}$ reuocata ad minimos terminos, est $\frac{9}{4}$. Quoniam igitur R 1 * 9 = 3, & R 1 * 4 = 2: etiam R 1 * 18 *ad* R 1 * 8 = 3 *ad* 2. Rursus ex datis radicalibus numeris vnus sit R 1 * $\frac{1}{6}$, alter sit R 1 * $\frac{5}{40}$: fractio erit $\frac{1 \text{ per } 6}{5 \text{ per } 40}$, hæc fractio reuocata ad simplicem, atque minimis terminis constantem numerum, erit $\frac{4}{1}$, atque R 1 * 4 = 2, præterea R 1 * 1 = 1; quare R 1 * $\frac{1}{6}$ *ad* R 1 * $\frac{5}{40}$ = 4 *ad* 1. Rursus ex datis numeris radicalibus vnus sit R 1 * 6, alter sit R 1 * 8; itaque fractio $\frac{6}{8}$ ad minimos terminos reuocata erit $\frac{3}{4}$: præterea R 1 * 4 = 2: Verum R 1 * 3 inueniri non potest per Appendicem lib. 1 Logisticæ; itaque dari non possunt duo numeri vulgares, ità vt vnus ad alterum, habeat eamdem

pro-

proportionem, quam R 1 ✱ 8, habet ad R 1 ✱ 6.

Problema VI.

Data sit scriptio Logistica, in qua duo numeri radicales signo + vel − connectantur: ità tamen, vt singuli pro numeratore habeant vnitatem atque inter se sint commensurabiles; & talis scriptio sit R n ✱ A *et* + R n ✱ B. vel R n ✱ A *et* − R n ✱ B.

Oporteat inuenire vnum numerum radicalem, æquiualentem propositæ scriptioni Logisticæ.

Solutio. Si dati numeri radicales non habent denominatorem, communem, ipsorum loco assumendi sunt duo numeri radicales ipsis æquiualentes, atque habentes communem denominatorem: qui inueniri possunt per problema 4. Præterea, per problema 5. inueniantur duo numeri vulgares X & Z, ità vt X *ad* Z = R n ✱ A *ad* R n ✱ B; quod si fieri non possit, numeri radicales dati non erunt commensurabiles, vt hic supponitur, & etiam fieri non poterit quod petitur in proposito problemate. His peractis, atque adeo supposito quod dati numeri radicales habeant communem denominatorem n, quodque inuenti sint numeri vulgares X & Z, ità vt X *ad* Z = R n ✱ A *ad* R n ✱ B, inueniatur numerus C, qui æquetur aggregato numerorum X & Z, si dati radicales numeri similibus signis afficiantur; vel numerus C, sit differentia numerorum X & Z: si dati radicales numeri dissimilibus signis afficiantur. Deinde inuentus numerus, C, toties in se ductus, quot vnitates continet communis denominator n, ducatur in minorem numerum

scriptum

scriptum post asterismum in datis numeris radicalibus; atque productum ex hac multiplicatione diuidatur per minorem ex numeris X & Z toties in se ductum, quot vnitates continet comunis denominator n: Denique vltimæ huius diuisionis productum scribatur post asterismum, in numero radicali, habente denominatorem n, atque numeratorem 1; scriptusque hic numerus radicalis afficiatur signo quo maior ex datis radicalibus numeris afficitur. Sic enim habebitur quæsitus radicalis numerus.

Exempli Gratia. Proposita scriptio sit R 1 ✳ 8 *et* † R 1 ✳ 18. itaque per 5 probl. R 1 ✳ 8 *ad* R 1 ✳ 18 = 2 *ad* 3. Præterea 2 † 3 = 5, item 5 semel ductum in se (quia communis denominator est 1) dat 25; hic numerus 25 ductus in 8 (qui est minor ex duobus numeris scriptis post asterismos) dat 200; iam vero quia numerorum 2 & 3 minor est 2, & 2 semel ductum in se dat 4, numerus 200 diuidi debet per 4: eritque productum 50. deniq; R 1 ✳ 50, erit quæsitus radicalis numerus: atque verum erit, quod R 1 ✳ 50 = R 1 ✳ 8 *et* † R 1 ✳ 18. Rursus data scriptio sit R 1 ✳ 50 & — R 1 ✳ 18; itaque per prob. 5. R 1 ✳ 50 *ad* R 1 ✳ 18 = 5 *ad* 3: item 5 — 3 = 2: præterea numerus 2, semel ductus in se, dat 4; hic numerus 4 *in* 18 = 72; iam vero quia numerorum 5 & 3, minor est 3: & numerus 3 semel in se ductus dat 9; numerus 72 diuidi debet per 9, cuius diuisionis productum est 8; denique R 1 ✳ 8 erit quæsitus numerus radicalis, atque verum erit quod R 1 ✳ 8 = R 1 ✳ 50 *et* — R 1 ✳ 18.

Nota si ex datis duobus numeris signo † vel — connexis vnus foret radicalis, & alter vulgaris: atque peteretur vnus radi-

radicalis numerus datis numeris æqualis; posset prius datus vulgaris reuocari ad æquiualentem radicalem, vt docetur probl. 3. quo facto, per problema hic propositum inuenietur quæsitus numerus radicalis.

Problema VII.

Sit scriptio in qua duo numeri radicales connexi sint particula *in*, vel particula *per*: & singuli pro numeratore habeant vnitatem; atque talis scriptio sit R n ✱ A *in* R n ✱ B. Vel certe scriptio R n ✱ A *per* R n ✱ B.

Oporteat inuenire vnum numerum radicalem æquiualentem propositæ scriptioni.

Solutio. Si dati radicales numeri non habeant communem denominatorem, ipsorum loco assumendi sunt duo numeri radicales datis æquiualentes, atque habentes denominatorem communem, n; qui numeri inueniri poterunt per probl. 4. quo facto, in datis radicalibus numeris post asterismos scripti vulgares numeri, eodem modo particula *in* vel *per* connectantur, sicut in proposita scriptione connexi sunt numeri radicales: atque per prob. 3. vel 4. cap. 3. lib. 1. Logisticæ, ad vnum numerum reuocentur: inuentus hic numerus, scribatur post asterismum, in numero radicali, qui habeat denominatorem n, atque pro numeratore habeat vnitatem: denique scriptus numerus radicalis afficiatur signo †, si dati duo radicales numeri similibus signis afficiantur: vel inuentus numerus radicalis afficiatur si-

gno

gno −, ſi dati duo radicales numeri diſſimilibus ſignis afficiantur: ſic enim habebitur quæſitus numerus radicalis, æquiualens propoſitæ ſcriptioni.

Exempli gratia propoſita ſit ſcriptio R 1 ∗ 9 *in* R 1 ∗ 4. Quoniam 9 *in* 4 = 36: R 1 ∗ 36 = R 1 ∗ 9 *in* R 1 ∗ 4; ſimiliter propoſita ſcriptio ſit R 1 ∗ 9 *in* − R 1 ∗ 4: quoniam 9 *in* − 4 = − 36; etiam − R 1 ∗ 36 = R 1 ∗ 9 *in* − R 1 ∗ 4. Rurſus data ſcriptio ſit − R 1 ∗ 9 *in* − R 1 ∗ 4: quoniam − 9 *in* − 4 = 36. etiam R 1 ∗ 36 = − R 1 ∗ 9 *in* − R 1 ∗ 4. Rurſus data ſcriptio ſit R 1 ∗ 64 *per* R 1 ∗ 4: quoniam 64 *per* 4 = 16: etiam R 1 ∗ 16 = R 1 ∗ 64 *per* R 1 ∗ 4.

Nota. Si in propoſita ſcriptione, ex duobus numeris particula *in* vel *per* connexis, vnus tantum foret radicalis, & alter foret vulgaris; atque peteretur numerus radicalis æquiualens propoſitæ ſcriptioni; prius per probl. 3. vulgaris numerus reuocari poſſet ad radicalem, ſibi æquiualentem; quo facto per problema propoſitum inueniretur numerus radicalis quæſitus.



EPIS-

GRIMALDVS DE NOBILIBVS

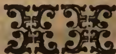
R.P. ÆGIDIO FRANCISCO DE GOTTIGNIES

Societatis Iesu. S.



Rius à te mihi interdictam, vt eo tempore inutilem, atque superfluam, Euclideorum Elementorum lectionem, nuper te suadente, aggressus sum; potissimum auidus experiri, an mihi eueniret quod futurum prædixeras, nimirum, an maximè compendiatè Geometriæ elementa proposita in Idea tuæ Logisticæ, mihi sufficerent, non tantum vt Euclideam doctrinam facillimè intelligerem, verum etiam vt proprio marte singula commode demonstrarem, quę proponuntur ab Euclide. Huius conatus mei specimen, compositum horis iuris prudentiæ studio non impeditis, ad te mitto, in quo singulas primi & secundi libri propositiones Euclideo ordine propono, atque demonstrò methodo tua; hæc nunquam ante ità mihi placuit, quam quando ex assumpto exercitio didici, eius ab Euclidea methodo diuersitatem. Quot in hac ambages, quanta planè superflua, quam miserę demonstrationes vix vnquam in forma syllogistica propositę, & plerumque non nisi negatiuæ, atque concludentes non tam ità se habere quod asseritur, quam ex eius opposito sequi absurdum. Præterea singula fere aut immediatè, aut mediatè innituntur axiomati propter rationes pag. 64. Ideæ tuæ

Logisticæ allatas, proscripto à tua methodo, quodque, meo iudicio, oculis satis benè, intellectui malè seruit: atque adeò manualium practicæ Geometriæ concedendum sit, sed pro speculatiua, atque theorica nullatenus admittendum: tametsi consequenter concedi debeat vacillare demonstrationes propemodum omnes, quæ ab ipso Euclide, vel eius expositoribus propositæ circumferuntur. Plura huiusmodi alia sunt, quæ ex assumpto exercitio discere mihi iucundum fuit. Iam verò, vt hoc ipsum alijs innotesceret, existimaui operæ pretium fore, vt plures Euclideorum elementorum libri tua methodo demonstrati prodirent in lucem: sic enim commodè conferre possent vtriusque methodi demonstrationes, qui in discenda Mathesi, vadunt qua itur, non qua eundum est: & vt mihi persuadeo bonas horas malè perdunt, non alio errore decepti, quam quod nunquam peruenerint ad melioris methodi cognitionem. Hæc sunt quæ me impulerunt, vt censuræ tuæ offerrem, quas priorum librorum propositionibus addidi demonstrationes; etenim si à te probentur, atque non improbetur consilium meum: omnes priores sex libros elementorum Euclidis simili ordine demonstratos, bono publico, publici iuris facere decreui.



ELEMENTORVM EVCLIDIS
LIBER PRIMVS
Logisticis discursibus demonstratus
A
GRIMALDO DE NOBILIBVS.

Problema I. Propositio I.

S*Vper data recta linea triangulum æquilaterum constituere.* Fig. 1.

Data sit recta linea A B.

Oporteat describere triangulum æquilaterum cuius vnum latus sit A B.

Solutio. Centro A interuallo A B describatur arcus, atque eodem interuallo, & centro B describatur alius arcus, priorem arcum intersecans in puncto C; denique ducantur rectæ A C, & B C, triangulum A B C erit æquilaterum.

Demonstratio. Ex proposita solutione patet, lineam circularem centro A radio A B descriptam alicubi intersecare lineam circularem centro B, atque radio A B descriptam: ergo potest centro A, atque radio A B describi arcus, qui arcum centro B radio A B descriptum intersecet in C: sed per axioma 9. partis 2. Ideæ, huiusmodi arcus sese intersecant in vnico puncto: ergo C punctum est: ergo lineæ A C, C B, A B singulæ sunt latera eiusdem trianguli A C B: sed etiam lineæ A C, C B, A B sunt inter se æquales, quandoquidem

ſint radij æqualium circulorum, vt patet ex ſolutione allata: ergo eiuſdem trianguli A CB ſingula latera ſunt inter ſe æqualia; adeoque faciendo, quæ in ſolutione præſcripta ſunt, habetur triangulum A B C, atque illud triangulum eſt æquilaterum. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

VT propoſitum problema demonſtrarem, aſſumendum mihi fuit axioma 9. partis 2. Ideæ, quod axioma non inuenio apud Euclidis commentatorem, ex quo ſumpſi propoſitionum titulos. Qua ex cauſa prætermiſſum ſit, non ſatis percipio; etenim certiſſimum eſt, non quaslibet duas curuas lineas ſemel tantum ſibi occurrentes ſeſe interſecare in vnico puncto, cum manifeſtum ſit, duas curuas lineas habere poſſe partem communem. Quare, licet circuli arcus ſint curuæ lineæ, tamen duos circulorum arcus ſemel ſeſe interſecantes tantum in vnico puncto ſeſe interſecare, vel immediatè manifeſtum eſt ex terminis, quemadmodum ex terminis manifeſtum eſt Euclidis axioma aſſerens, duas rectas lineas ſemel ſeſe interſecantes tantum in vnico puncto ſeſe interſecare: vel non eſt manifeſtum ex terminis. Si primum ſupponatur, & tamen de rectis lineis agens axioma expreſsè ponendum erat inter axiomata, vt deinde in demonſtrationibus aſſumi poſſet, non video, cur alterum axioma de arcubus agens ponendum non fuerit, cum ipſi innitatur demonſtratio primi problematis, adeò vt hæc demonſtratio planè erronea ſit, atque nullo modo ſubſiſtat ipſa problematis ſolutio, eo ipſo quod ponatur, duos arcus ſemel ſe-

ſe

se interſecantes non in vnico tantum puncto ſeſe interſecare, ſed plura puncta habere communia. Si verò ſupponatur, de arcubus agens Logiſticæ axioma ex terminis manifeſtum non eſſe: profectò non aſſequor, quomodo rigorosè demonſtrari poſſit primum Euclidis problema, niſi prius demonſtretur, verum eſſe, quod aſſerit Logiſticæ axioma agens de arcubus. Inſinuata difficultas me impulit, vt circa primum problema varios Euclideæ doctrinæ ſcriptores conſulerem, nimirum Chriſtophorum Clauium, Federicum Commandinum, Chriſtophorum Grimbergerum, Ioannem Alphonſum Borellum, Andream Taquet. Apud nullum ex his authoribus inueni, aut axioma Logiſticæ agens de arcubus ſeſe interſecantibus, aut inſinuatum, ex definitionibus conſtare, quod in dicto axiomate aſſeritur. Hinc intuli primò, prædictos authores non ità ſcrupuloſos eſſe in ſuis demonſtrationibus, vt non liberè aſſumant axiomata minus clara, quam ſint illa, quæ expreſſe proponunt tanquam axiomata: ſecundò, Logiſticæ axioma agens de arcubus ſeſe interſecantibus admittendum inter rigoroſa axiomata ab ijs omnibus, qui nolunt concedere, quod nequidem prima Euclideorum elementorum propoſitio rigorosè demonſtrata ſit ab vllo ex citatis authoribus.

Problema II. Propoſitio II.

AD datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem ponere.

Data ſit recta linea A B, & punctum aliquod C. Fig. 2.

Oporteat ex puncto C ducere rectam C E, æqualem datæ rectæ A B.

Solu-

Solutio. Ponatur quæuis indefinita recta linea C D, atque centro C interuallo A B describatur arcus secans rectam C D in puncto E; erit recta C E illa, quæ petitur.

Demonstratio. Ex solutione patet A B = C E: sed etiam C E est recta linea posita ad punctum C: ergò ad punctum C posita est recta linea C E æqualis datæ rectæ A B. Quod erat demonstrandum.

Problema III. Propositio III.

Duabus datis rectis lineis minorem ex maiori auferre.

Data sit recta C D & altera minor A B.

Oporteat ex maiori C D, minorem A B auferre, atque inuenire residuum E D.

Fig. 2. Solutio. Interuallo A B, centro C describatur arcus secans rectam C D in puncto E: erit recta E D illa, quæ remanet post ablationem, siue quæ petitur.

Demonstratio. Ex solutione patet C D − C E = E D: sed etiam patet A B = C E: ergo C D − A B = E D. Quod erat demonstrandum.

Theorema I. Propositio IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique: habeant verò angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum, & basim basi æqualem habebunt, eritque totum triangulum æquale triangulo, & anguli correspondentes æqualibus lateribus æquales erunt.

Fig. 3. Sint duo triangula A B C, & D E F, atque C A = E D

item

item B A = F D, ac præterea angulus C A B = angulo E D F.

Dico primo, C B = E F.

Dico secundo angulum C = angulo E.: item angulum B = angulo F.

Dico tertio triangulum A B C = triangulo D E F.

Demonstratur prima & secunda pars. Per hypothesim C A = E D: item B A = F D: ergo C A *ad* E D = B A *ad* F D: atqui etiam per hypothesim angulus C A B = angulo E D F: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ, triangulum C A B est simile triangulo E D F: ergo C B *ad* E F = C A *ad* E D, & insuper angulus C = angulo E, item angulus, B = angulo F: sed per hypothesim C A = E D: ergo etiam C B = E F, & insuper angulus C = angulo E, item angulus B = angulo F. Vt in prima, & secunda parte asseritur.

Constructio pro tertia parte. Ductæ sint rectæ A X & D Z perpendiculares ad rectas C B, & E F, atque ipsis (productis si opus fuerit) occurrentes in punctis X & Z.

Demonstratur tertia pars. Per secundam partem angulus C = angulo E: sed etiam angulus C B X = angulo E Z D, cum vterque per constructionem rectus sit: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum C X A est simile triangulo E Z D: ergo A X *ad* D Z = C A *ad* E D: atqui per hypothesim C A = E D: ergo A X = D Z: sed per primam partem etiam C B = E F: ergo C B *in* X A ductu 3. = E F *in* Z D ductu 3: atqui C B *in* X A ductu 3 = triangulo A C B: item E F *in* Z D ductu 3. = triangulo D E F: ergo triangulum A C B = triangulo D E F. Vt asseritur in tertia parte. Fig. 4.

Theo

Theorema II. Propositio V.

Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli inter se sunt aequales, & productis aequalibus lateribus, qui sub basi fiunt anguli inter se sunt aequales.

Fig. 4 In triangulo A B C latus A B = lateri A C, sitque latus A B productum in Z, & similiter latus A C productum sit in X.

Dico primò, angulum A B C = angulo A C B.

Dico secundò, angulum Z B C = angulo X C B.

Constructio. Ducta sit recta A D occurrens basi in D, ità vt B D = D C.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim, vel constructionem in triangulis B D A, & C D A, latus B A = lateri A C, item latus B D = lateri D C, denique latus D A = lateri D A, est enim idem latus commune vtrique triangulo: ergo per theor. 5. partis 3. Ideae triangulum B D A est simile triangulo C D A: ergo angulus A B D = angulo A C D, siue quod idem est angulus A B C = angulo A C B. Vt asseritur in prima parte.

Fig. 4. Demonstratur secunda pars. Per theor. 2. partis 3. Ideae angulus A B C + Z B C = duobus rectis angulis, & etiam angulus A C B + X C B = duobus rectis angulis: ergo angulus A B C + Z B C = angulo A C B + X C B: sed per primam partem angulus A B C = angulo A C B: ergo etiam angulus Z B C = angulo X C B. Vt asseritur in secunda parte.

Theorema III. Propositio VI.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & ab æqualibus angulis subtensa latera inter se æqualia erunt. Fig. 4

In triangulo A B C angulus A B C sit æqualis angulo A C B.

Dico latus B A æquari lateri A C.

Constructio. Recta A D perpendicularis ad B C illi occurrat in D.

Demonstratio. Per hypothesim angulus A B D = angulo A C D: sed etiam ex constructione patet angulum B D A = angulo C D A: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum B D A est simile triangulo C D A: ergo B A *ad* A C = A D *ad* A D: sed patet A D = A D: ergo etiam B A = A C. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV. Propositio VII.

SVper eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituetur ad aliud atque aliud punctum ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

Ex punctis B, & C rectæ B C ductæ sint duæ rectæ B A, & C A concurrentes in puncto A, præterea ad eamdem partem rectæ B C duæ rectæ B X, & C X concurrant in puncto X; denique B A & B X sint inter se æquales, & etiam C A & C X inter se æquales sint. Fig. 5.

Dico punctum A non esse diuersum à puncto X.

Demonstratio. Per hypothesim in triangulis B A C, & B X C, recta B A = B X, item C A = C X, denique B C = B C: ergo B A *ad* B X = C A *ad* C X ≏ B C *ad* B C: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum B A C est simile triangulo B X C: ergo angulus C B A = angulo C B X: sed etiam per hypothesim lineæ rectæ B A & B X sunt ad eamdem partem rectæ B C: ergo per theor. 1. partis 3. Ideæ puncta B, A, X sunt in eadem recta linea: atqui per hypothesim B A = B X: ergo puncta A, & X non sunt diuersa. Quod erat demonstrandum.

Theorema V. Propositio VIII.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia vtrumque vtrique, habuerint vero & basim basi æqualem: angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

Fig. 3. Sint duo triangula A C B, & D E F, atque C A = E D, item A B = F D, denique C B = E F.

Dico angulum C A B = angulo E D F, item angulum A C B = angulo D E F, ac denique angulum C B A = angulo E F D.

Demonstratio. Per hypothesim C A = E D, item A B = F D, denique C B = E F: ergo C A *ad* E D = A B *ad* F D ≏ C B *ad* E F: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum A C B est simile triangulo D E F, ergo angulus C A B = angulo E D F, item angulus A C B = angulo D E F, ac denique angulus C B A = angulo E F D. Quod erat demonstrandum.

pro-

Problema IV. Propositio IX.

D*Atum angulum rectilineum bifariam secare.*
Datus sit angulus rectilineus B A C.

Opporteat ducere rectam A F, ita vt angulus B A F = angulo C A F.

Solutio. Centro A, atque eodem interuallo describantur duo arcus, quorum vnus rectam A B secet in puncto D, alter rectam A C secet in puncto E. Rursus centro D describatur aliquis arcus, quem eodem interuallo, atque centro E descriptus arcus intersecet in puncto F. Denique ducatur recta A F; sic enim habebitur quæsitum. Fig. 6.

Constructio: Ductæ sint rectæ D F, & E F.

Demonstratio. Ex solutione patet A D = A E, item D F = E F, ac denique A F = A F: ergo A D *ad* A E = D F *ad* E F = A F *ad* A F: ergo per theor. 5. part. 3. Ideæ triangulum D A F est simile triangulo E A F: ergo angulus D A F = angulo E A F, adeoque angulus B A F = angulo C A F. Quod erat demonstrandum.

Problema V. Propositio X.

D*Atam rectam bifariam secare.*
Data sit recta A B.

Opporteat inuenire eius punctum D, ita vt A D æquetur D B. Fig. 7.

Solutio: Centro A describatur arcus, quem centro B, atque eodem interuallo descriptus arcus secet in puncto C.

Rursus centro A describatur arcus, quem eodem interuallo descriptus arcus secet in puncto F diuerso à puncto C. Denique per inuenta puncta C & F ducatur recta linea; hæc occurret rectæ AB in puncto D quæsito, eritque AD æqualis ipsi DB.

Constructio. Ductæ sint rectæ CA, CB, AF, BF.

Demonstratio. Ex solutione patet CA = CB, item AF = BF, ac deniq; CF = CF: ergo CA *ad* CB = AF *ad* BF = CF *ad* CF: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum FCA est simile triangulo FCB: ergo angulus FCA = angulo FCB, hoc est angulus DCA = angulo DCB: sed etiam CA *ad* CB = CD *ad* CD, cum per solutionem CA = CB: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum ACD est simile triangulo BCD: ergo AD *ad* DB = DC *ad* DC: sed DC = DC: ergo AD = DB. Quod erat demonstrandum.

Problema VI. Propositio XI.

D*Ata recta linea, à puncto in ea dato ad rectos angulos lineam ducere.*

Fig. 8. Data sit recta linea AB, atque in illa datum sit punctum C.

Opporteat ex puncto C ducere rectam lineam CF perpendicularem ad rectam AB.

Solutio. Centro C eodem interuallo describantur duo arcus, quorum vnus in puncto D, alter in puncto E secet lineam AB. Rursus centro D describatur arcus intersecans arcum centro E, atq; eodem interuallo descriptum in

puncto

puncto F. Denique ducatur recta FC; erit FC perpendicularis quæsita.

Demonstratio. Ductis rectis FD, & FE. Ex solutione patet FD = FE, item DC = EC: atqui CF = CF: ergo FD *ad* FE = DC *ad* CE = CF *ad* CF: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum DCF est simile triangulo ECF: ergo angulus DCF = angulo ECF: sed per theor. 3. partis 3. Ideæ angulus DCF + ECF = duobus rectis angulis: ergo angulus DCF est rectus, adeoque linea CF est perpendicularis ad lineam DE, siue AB. Quod erat demonstrandum.

Problema VII. Propositio XII.

SVper datam rectam lineam à dato puncto, quod in ea non est perpendicularem rectam ducere.

Data sit recta linea AB, extrà quam datum sit punctum C non indirectum cum recta AB. Fig. 7.

Opporteat ex puncto C ducere rectam CD perpendicularem ad rectam AB.

Solutio. Cum per hypothesim punctum C non sit in directum cum linea AB patet punctum C esse ad vnam partem rectæ AB. Itaque in opposita parte rectæ AB centro A interuallo AC describatur arcus, quem alius arcus centro B interuallo BC intersecet in puncto F. Denique ducatur recta linea CF; hæc erit perpendicularis ad rectam AB.

Constructio. Cum puncta C, & F sint ad oppusitas partes rectæ AB patet rectam AB (productam, si opus fuerit) intersecari in aliquo puncto à recta CF; itaque punctum D

sit

sit illud, in quo recta C F intersecat rectam A B, sintque ductæ rectæ A C, C B, A F, B F.

Demonstratio. Ex solutione patet A C = A F, item B C = B F, ac denique A B = A B: ergo A C *ad* A F = B C *ad* B F = A B *ad* A B: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ, triangulum A B C est simile triangulo A B F: ergo angulus A B C = angulo A B F, hoc est angulus D B C = angulo D B F; sed etiam B C = B F, item B D = B D: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ ttiangulum B D C est simile triangulo B D F: ergo angulus B D C = angulo B D F: sed etiam per theor. 3. partis 3. Ideæ angulus B D C + B D F = duobus rectis angulis: ergo angulus B D C rectus est, adeoque linea C D, siue C F est perpendicularis ad lineam D B, siue A B. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI. Propositio XIII.

CVm recta linea super rectam insistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

Est prima pars theorematis 2. partis 3. Ideæ.

Theorema VII. Propositio XIV.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

Est secunda pars theorematis 2. partis 3. Ideæ.

Theo-

Theorema VIII. Propositio XV.

SI duæ rectæ lineæ sese inuicem secuerint, angulos, qui ad uerticem sunt, inter se æquales efficient.

Est theorema 3. partis 3. Ideæ.

Theorema IX. Propositio XVI.

CViuscumque trianguli vno latere producto externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

Trianguli ABC vnum latus AC productum sit vsque in D. Fig. 9.

Dico, angulum externum BCD esse maiorem quolibet ex duobus angulis A, vel B.

Demonstratio. Per theor. 13. partis 3. Ideæ angulus A + B + ACB = duobus rectis: sed per theor. 2. partis 3. Ideæ angulus BCD + ACB = duobus rectis angulis: ergo angulus A + B + ACB = angulo BCD + ACB: ergo vtrimque auferendo eundem angulum ACB, etiam angulus A + B = angulo BCD: ergo angulus BCD est maior quolibet ex angulis A, vel B. Quod erat demonstrandum.

Theorema X. Propositio XVII.

CViuscumque trianguli duo anguli simul sumpti sunt minores duobus rectis.

Ex theor. 13. partis 3. Ideæ constat, quod cuiuscumque

trianguli

trianguli tres anguli simul æquentur duobus rectis angulis: ergo duo simul sunt minores duobus rectis.

Theorema XI. Propositio XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

In triangulo A B C latus A C sit maius quolibet ex
Fig. 10 duobus lateribus A B, & B C.

Dico, angulum A B C esse maiorem quolibet ex duobus angulis A, & C.

Constructio. In recta A C notatum sit punctum D ita vt A C *ad* B C = B C *ad* C D, sitque ducta recta B D.

Demonstratio. Per hypothesim A C est maior, quam B C: sed per constructionem A C *ad* B C = B C *ad* C D: ergo etiam A C est maior, quam C D: ergo punctum D cadit intra puncta A & C: ergo recta B D cadit intra rectas A B, & C B: ergo angulus A B C est maior angulo D B C: sed quoniam per constructionem A C *ad* C B = C B *ad* C D & angulus C est communis per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum A B C est simile triangulo B D C, adeoque angulus A = angulo D B C: ergo angulus A B C est maior angulo A.

Similiter patet, angulum A B C esse maiorem angulo C, si per constructionem ponatur A C *ad* A B = A B *ad* A D.

Theo-

Theorema XII. Propositio XIX.

O*Mnis trianguli maior angulus à maiori latere subtenditur.*

In triangulo A B C angulus A B C sit maior quolibet ex angulis A, & C. Fig. 10.

Dico latus A C esse maius quolibet ex reliquis lateribus A B, & B C.

Constructio. Ex puncto B ducta sit recta linea B D occurrens rectæ A C in puncto D, ita vt angulus D B C = angulo B A C.

Demonstratio. Per hypothesim angulus A B C est maior angulo B A C: sed per constructionem angulus D B C = angulo B A C: ergo angulus A B C est maior angulo D B C: ergo recta B D cadit intra rectas A B, & B C, adeoque recta A C est maior, quam recta D C: sed quoniam per constructionem angulus D B C = angulo A, & insuper angulus C est communis per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum A B C est simile triangulo B D C, adeoque A C *ad* C B = B C *ad* D C: ergo ex tribus lineis proportionalibus A C, C B, D C, prima A C maior est vltima D C, adeoque etiam prima A C est maior media C B.

Simili planè discursu euincitur lineam A C esse maiorem linea A B, si per constructionem angulus D B A ponatur æqualis angulo C.

Theorema XIII. Propositio XX.

Omnis trianguli qualibet duo latera simul sumpta reliquo sunt maiora.

Fig. 11 Sit quoduis triangulum A B C cuius maximum latus sit A C.

Dico lineas C B, & A B simul sumptas esse maiores linea A C.

Si prudenter dubitari potest de veritate theorematis, prout ab Euclide proponitur, certè dubitari non potest, nisi de duobus minoribus lateribus, an simul, reliquo, atque maiori latere maiora sint; Qua de causa ad hunc casum volui restringere theorema, quod in alijs casibus ex ipsis terminis planè euidens demonstrabile non videtur.

Constructio. Centro C radio A C descriptus sit arcus, qui rectæ C B productæ occurrat in puncto D, sitque ducta recta D A.

Demonstratio. Per constructionem A C = C D: sed per hypothesim A C est maior B C: ergo C D est maior, quam B C: ergo A B cadit inter rectas A D & A C: ergo angulus D A C est maior angulo D A B: sed per constructionem, & propositionem 5. hic, etiam angulus D A C = angulo A D C: ergo angulus A D C est maior angulo D A B: ergo per propositionem præcedentem linea A B est maior, quam linea D B: ergo C B + A B est maior, quam C B + D B: sed C B + D B = C D = A C, vt patet ex constructione: ergo C B + A B est maior, quam A C. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XIV. Propositio XXI.

SI super trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, quæ interius iungantur; hæ lineæ reliquis trianguli duobus lateribus minores erunt, minorem vero angulum continebunt. Fig. 12

In triangulo A B C ductæ sint duæ lineæ rectæ B D & C D intra triangulum concurrentes in puncto D.

Dico primo, rectas C D, & D B simul sumptas esse minores rectis C A, & A B simul sumptis.

Dico secundo, angulum B D C esse maiorem angulo B A C.

Constructio pro prima parte. Recta B D producta occurrat rectæ C A in puncto E.

Demonstratur prima pars. Quoniam per hypothesim punctum D cadit intra triangulum A B C, patet D B esse minorem, quam E B: sed per propositionem 20. hic, C D est minor, quam C E † E D: ergo C D † D B est minor, quam C E † E D † D B hoc est C E † E B: Rursus ex hypothesi, & constructione satis constat C E esse minorem, quam C A: sed per propositionem 20. hic etiam E B est minor, quam E A † A B: ergo C E † E B est minor, quam C E † E A † A B, hoc est C A † A B. Quoniam igitur ostensum est C D † D B esse minorem, quam C E † E B, & insuper etiam C E † E B esse minorem, quam C A † A B, manifestum est C D † D B esse minorem C A † A B. Vt asseritur in prima parte.

Constructio pro secunda parte. Per puncta A & D du- Fig. 12

cta recta occurrat rectæ B C in puncto F.

Demonstratur secunda pars. Quoniam per hypothesim punctum D cadit intra triangulum A B C, manifestum est, rectam A F cadere intra rectas A C & A B, adeòque angulum B D F + F D C = angulo B D C, item angulum B A F + F A C = angulo B A C: sed quoniam per prop. 16. hic, angulus B D F est maior angulo B A F, & etiam angulus F D C est maior angulo F A C, etiam angulus B D F + F D C est maior angulo B A F + F A C: ergo angulus B D C est maior angulo B A C, Vt asseritur in secunda parte.

Problema VIII. Propositio XXII.

T*Ribus datis lineis, quarum duæ simul tertia sint maiores triangulum construere.*

Fig. 13 *D*atæ sint tres rectæ lineæ R, X, Z, quarum quælibet duæ simul sint maiores reliqua.

Opporteat construere triangulum A B C ità vt A B = R, item A C = X, denique B C = Z.

Solutio. Posita recta A B, quæ sit æqualis rectæ R, centro A interuallo X describatur arcus, qui in puncto C intersecet alium arcum centro B interuallo Z descriptum, ducanturque rectæ A C, & B C, triangulum A B C erit illud, quod petitur.

Constructio. Sit R illa ex datis tribus lineis, qua inter reliquas duas nulla maior. Deinde centro A interuallo X descriptus arcus occurrat rectæ A B (productæ si opus fuerit) in puncto F, & centro B interuallo Z descriptus arcus occurrat rectæ A B in puncto E.

De-

Demonstratio. Per hypothesim R non est minor quam X, vel Z: sed etiam per hypothesim R = A B, item X = A F, item Z = B E: ergo puncta E, F, non cadunt extrà rectam A B: sed quoniam per hypothesim R est minor quam X + Z, etiam A B est minor, quam A F + B E, & consequenter B F est minor, quam B E: ergo puncta A & E sunt intra arcum centro A interuallo A F descriptum: atqui etiam puncta F & B sunt intra arcum centro B interuallo B E descriptum: igitur arcus centro A interuallo A F descriptus, atque productus alicubi extra rectam A B occurrit arcui centro B interuallo B E descripto atque producto, qui concursus vocatur C, vt patet ex solutione: sed per axioma 9. partis Ideæ talis arcuum concursus fit in vnico puncto: ergo C est punctum extra lineam A B constitutum: ergo lineæ A B, B C, C A constituunt, siue terminant triangulum A B C: sed etiam ex solutione patet A B = R, item A C = X, item B C = Z: ergo triangulum A B C terminatur à tribus lineis æqualibus datis tribus lineis R, X, Z. Quod erat demonstrandum.

Problema IX. Propositio XXIII.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum dato angulo rectilineo æqualem constituere. Fig. 14

Sit datus angulus M G H, & recta aliqua linea A B, in qua notatum sit punctum C.

Opporteat ex puncto C ducere rectam C D, ità vt angulus D C B æquetur angulo M G H.

Solutio. Centro G interuallo G I ad libitum assumpto des-

describatur arcus I K, rectæ G M occurrens in puncto I, rectæ vero G H occurrens in puncto K. Deinde eodem interuallo, atque centro C describatur alius arcus E L occurrens rectæ A B in puncto E, præterea interuallo K I centro E describatur arcus, qui arcum E L intersecet in F. Denique per puncta C & F ducatur recta C D, erit angulus D C B ille, qui petitur.

Etenim ex solutione, & axiomate 11. partis 2. Logisticæ satis patet arcum K I = arcui E F, adeoque mensuras angulorum D C B, & M G H inter se æquales esse, & consequenter angulum D C B = angulo M G H. Vt petebatur.

Theorema XV. Propositio XXIV.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, angulum autem angulo maiorem qui æqualibus lineis continetur, & basim basi maiorem habebunt.

Fig. 15 In triangulis A B C, & D E F latus A B = lateri D E, item latus A C = lateri D F, denique angulus B A C sit maior angulo E D F.

Dico B C esse maiorem, quam E F.

Constructio. Angulus E D G = B A C, ità vt D F = D G; atque ductæ sint rectę E G, & F G.

Demonstratio. Per constructionem D F = D G: ergo per prop. 5. hic, etiam angulus D F G = angulo D G F: sed totus angulus D G F est maior partiali angulo E G F: ergo angulus D F G est maior angulo E G F: atqui etiam totus angulus E F G est maior partiali angulo D F G: ergo angulus E F G est maior angulo E G F: ergo per prop. 19. hic,

hic, etiam latus E G est maius latere E F: sed quoniam per hypothesim, vel constructionem D G = D F = A C, item D E = A B, & præterea angulus E D G = angulo B A C per prop. 4. hic, latus B C = lateri E G; ergo latus B C est maius latere E F. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVI. Propositio XXV.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim verò maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

In triangulis A B C, & D E F, latus A B = lateri D E, item latus A C = lateri D F, denique latus B C sit maius latere E F. Fig. 15

Dico angulum B A C esse maiorem angulo E D F.

Constructio. Centro D interuallo D F descriptus sit arcus H F occurrens rectæ D E (productæ, si opus fuerit) in puncto H. Præterea posita sit recta E G æqualis rectæ B C, atque arcui per puncta H & F iam descripto occurrens in puncto G. Denique ducta sit recta D G.

Demonstratio. Per hypothesim B C est maior, quam E F: sed E G = B C: ergo E G est maior quam E F: ergo centro E radio E F descriptus circulus, totus cadit intra circulum, centro E radio E G descriptum: ergo punctum G cadit extra circulum centro E radio E F descriptum: ergo arcus H G est maior arcu H F: ergo angulus E D G est maior angulo E D F: sed quoniam per hypothesim A C = D F = D G, & præterea A B = D E, ac denique per constructionem B C = E G per theor. 5. partis

3 Ideæ

3. Ideæ patet angulum E D G = angulo B A C: ergo angulus B A C est, maior angulo E D F. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVII. Propositio XXVI.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant; alterum alteri, vtrumque latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium an-
Fig. 3. *gulorum subtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.*

In triangulis A B C, & D E F angulus A B C = angulo D F E, & insuper angulus B C A = angulo F E D; denique latus B C = lateri F E: vel latus A B = lateri D F: vel denique latus A C = lateri D E.

Dico angulum B A C = angulo F D E, & præterea B C = F E: item A B = D F: item A C = D E.

Demonstratio. Per hypothesim angulus A B C = angulo D F E, & insuper angulus A C B = angulo *D* E F: ergo per theor. 5. part. 3. Ideæ triangulum A B C est simile triangulo D E F, adeoque angulus B A C = angulo F D E, & insuper B C *ad* F E = A B *ad* D F = A C *ad* D E: sed etiam per hypothesim B C = F E, vel A B = D F, vel A C = D E: ergo angulus B A C = angulo F D E, & præterea B C = F E: item, A B = D F: item A C = D E. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XVIII. Propositio XXVII.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

Est secunda pars assertionis 2. theorematis 4. partis 3. Ideæ.

Theorema XIX. Propositio XXVIII.

SI in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & opposito ad eamdem partem æqualem fecerit, aut internos ad eamdem partem duobus rectis æquales, parallelæ erunt istæ rectæ lineæ.

Est prima, & tèrtia pars assertionis secundæ theor. 4. part. 3. Ideæ.

Theorema XX. Propositio XXIX.

IN parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem: & interiores ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

Est assertio prima theor. 4. partis 3. Ideæ.

Theorema XXI. Propositio XXX. Fig. 1

QVæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Recta linea A B sit parallela rectæ C D, & insuper recta C D sit parallela rectæ E F.

Dico lineam A B esse parallelam lineæ E F.

Constructio. Ducta sit X Z occurrens rectæ A B in puncto G, rectæ verò C D in puncto H, & rectæ E F in puncto K.

Demonstratio. Per hypothesim rectæ A B, & C D sunt parallelæ: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ angulus A G X = angulo C H X: sed etiam angulus C H X = angulo E K X; quandoquidem per hypothesim etiam C D & E F sint inter se parallelæ: ergo angulus A G X = angulo E K X: igitur per theor. 4. partis 3. Ideæ lineæ A B & E F sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

Problema X. Propositio XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Fig. 17 In data recta linea A B, datum sit punctum C.

Opporteat per punctum C ducere rectam E D, quæ sit parallela datæ rectæ lineæ F G.

Solutio. Supposito, quod punctum H sit illud, in quo recta F G intersecat rectam A B, per prop. 23. hic ex puncto C ducatur recta C D, vt angulus D C B = angulo F H B, recta D C, siue D E erit illa, quæ petitur.

Demonstratio. Ex solutione angulus D C B = angulo F H B: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ lineæ D C, & F H, hoc est lineæ D E; & F G sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XXII. Propositio XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit quoduis triangulum A B C, cuius vnum latus A C productum sit vsque in D. Fig. 9.

Dico primo angulum A C D = angulo C B A + C A B.

Dico secundo angulum C B A + C A B + A C B = duobus rectis angulis.

Prima assertio in terminis infertur in demonstratione prop. 16. hic.

Secunda assertio est theorema 13. partis 3. Ideæ.

Theorema XXIII. Propositio XXXIII.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Linea recta A B sit æqualis, & parallela rectæ C D, præterea ductæ sint rectæ A C, & B D. Fig. 18

Dico primo rectam A C æquari rectæ B D.

Dico secundo rectam A C esse parallelam rectæ B D.

Constructio. Ducta sit recta C B.

Demonstratur prima pars. Quoniam per hypothesim recta A B est parallela rectæ C D per theor. 4. partis 3. Ideę angulus A B C = angulo D C B: sed quia per hypothesim A B = C D, etiam A B *ad* C D = B C *ad* B C: igitur angulus A B C = angulo B C D, & insuper A B *ad*

CD = BC *ad* BC: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum ABC est simile triangulo DCB: ergo AC *ad* BD = BC *ad* BC: sed BC = BC: ergo AC = BD. Quod erat primum.

Fig. 18 Demonstratur secunda pars. Ex demonstratione primæ partis constat triangulum ABC esse simile triangulo DCB: ergo angulus ACB = angulo DBC: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ recta AC est parallela rectæ BD. Quod erat secundum.

Theorema XXIV. Propositio XXXIV.

P*arallelogrammorum spaciorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.*

Fig. 18 Parallelogrammum AD habeat diametrum CB.

Dico primo latus AB = lateri CD: item latus AC = lateri BD.

Dico secundo angulum CAB = angulo BDC: item angulum ACD = angulo ABD.

Dico tertio triangulum CBA = triangulo CBD.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim figura AD est parallelogrammum: igitur recta AB est parallela rectæ CD, & præterea recta AC est parallela rectæ BD: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ angulus ABC = angulo DCB, & insuper angulus ACB = angulo DBC: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum CBA est simile triãgulo BCD: ergo CB *ad* BC = AB *ad* CD = AC *ad* BD: sed CB = BC:

BC: ergo AB = CD: item AC = BD. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Ex demonstratione primæ partis constat triangulum C B A esse simile triangulo B C D: Fig. 18
ergo angulus C B A = angulo B C D: item angulus B C A = angulo C B D: item angulus C A B = angulo C D B: ergo angulus C B A + C B D = angulo B C D + B C A: item angulus C A B = angulo C D B; sed angulus C B A + C B D = angulo A B D, & etiam angulus B C D + B C A = angulo A C D: ergo angulus A C D = angulo A B D: item angulus C A B = angulo B D C. Vt dicitur in secunda parte.

Demonstratur tertia pars. Per primam partem trianguli C B A basis C A *ad* trianguli C B D basim B D = 1 *ad* 1: Fig. 18
Deinde quia triangula ista per hypothesim sunt inter easdem parallelas, etiam altitudo trianguli C B A *ad* altitudinem trianguli C B D = 1 *ad* 1: Tertio ductus ex quo oritur triangulum C B A *ad* ductum primum = 1 *ad* 2: Quarto denique ductus primus *ad* ductum ex quo oritur triangulum C B D = 2 *ad* 1: igitur per theor. 3. partis 5. Ideæ triangulum C B A *ad* triangulum C B D habet rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum vna sit 1 *ad* 1, secunda sit 1 *ad* 1, tertia sit 1 *ad* 2, quarta sit 2 *ad* 1: sed ex probl. 3. cap. 2. partis 4. Ideæ patet, quod hæc ratio composita æquetur rationi 1 *ad* 1: ergo triangulum C B A *ad* triangulum C B D = 1 *ad* 1: sed 1 = 1: ergo triangulum C B A = triangulo C B D: Quod tertio loco asserebatur.

Scho-

Scholium.

IN præcedentibus propositionibus allatæ sunt variæ proprietates conuenientes triangulorum angulis, aut lateribus; præcipuus fructus, quem Euclides colligit ex his proprietatibus non apparet in hoc primo libro, meo enim iudicio consistit in triangulorum similium doctrina ab ipso proposita in sexto suorum Elementorum libro, quamque amplectitur theorema 5. partis 3. Ideæ Logisticæ, adeò vt in methodo Euclidea per prædictas propositiones, aliasque quam plurimas paulatim properando, post multas ambages tandem perueniatur ad doctrinam triangulorum similium contentam prædicto theoremate. Verum in methodo adhibita in Logistica, propemodum immediatè ex ipsis principijs infertur hæc triangulorum similium doctrina, ex qua veluti totidem corollaria facile deducuntur fere singulæ proprietates, triangulorum angulis, atque lateribus conuenientes, quæ in Elementorum primo libro afferuntur ab Euclide; quod an verum sit obseruare licet ex hactenus propositis demonstrationibus: et si verum est, nemo, vt opinor, negare poterit, Logisticæ methodum non vulgare compendium afferre pro inuestigandis proprietatibus, quæ conueniunt triangulorum angulis, aut lateribus. Altera via, qua Euclidea methodo infertur proportio, quam inter se habent diuersa triangula, aut ex triangulis constantes superficies, superfluis ambagibus multo amplius superat viam, qua Logisticæ methodus non tantum idem, verum etiam amplius aliquid assequitur, vt notatur in cap. 2. partis 5. Ideæ. Eterim

nim

nim ex notis huius capitis satis constat, in theoremate 3.cap. 1. partis 5. Ideæ, demonstrari vniuersaliter, quod qualescumque sint superficies, aut aliæ duæ quantitates X & Z, ita tamen, vt singulæ ex vnico ductu nominato producantur semper verum esse, quod X *ad* Z habeat rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum vna sit ratio basium, siuè vnius genitoris quantitatis X ad basim, siue vnum genitorem quantitatis Z, altera sit ratio altitudinum, siue alterius genitoris quantitatis X ad altitudinem, siue alterum genitorem quantitatis Z, tertia sit ratio ductus ex quo producitur X ad ductum primum, quarta sit ratio ductus primi ad ductum ex quo oritur Z; In demonstratione huius theorematis præter ipsa Logisticæ principia nihil assumitur nisi proportionum doctrina tradita in parte 4. Ideæ Logisticæ, & tamen licet, tam immediate connexum sit cum ipsis Logisticæ principijs huic Logisticæ theoremati coniungendo problema 3.cap.2. partis 4. Ideæ (quod docet inuenire rationem ex alijs pluribus rationibus compositam) habetur quidquid requiritur ad demonstrationem singularum propositionum Euclidis, in quibus asseritur, vel æqualitas, vel alia proportio inter duas superficies, dummodo cognitæ sint proportiones, quas habent istarum superficierum genitores, qui necessario lineæ sunt, & plerumque ex triangulorum similium doctrina inferri possunt, si ex ipsa hypothesi non cognoscantur; Vt hoc secundum, atque non vulgare compendium methodi Logisticæ melius appareat, si non eodem, certe plane simili semper discursu demonstro singulas propositiones, in quibus inter se comparantur diuersæ superficies, prius ostendendo, quam proportionem habeant genitores, deinde per theor.3.

partis

partis 5. Ideæ atque prob. 3. cap. 2. partis 4. Ideæ inferendo proportionem assertam in propositione.

Theorema XXV. Propositio XXXV.

P*arallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.*

Videtur planè superfluum demonstrare hoc theorema; quandoquidem immediatè subsequens theorema asserat de parallelogrammis æquales bases habentibus, quod præsens theorema dicit de parallelogrammis eamdem basim habentibus, manifestum autem est, quod æquales bases habeant parallelogramma, quæ eamdem basem habent.

Theorema XXVI. Propositio XXXVI.

Fig. 19 P*arallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.*

Parallelogramma A C & E G habeant bases A D, & E H inter se æquales, atque insuper altitudines sint æquales inter se.

Dico parallelogrammum A C = parallelogrammo E G.

Demonstratio. Per hypothesim basis A D *ad* basim E H = 1 *ad* 1: item altitudo parallelogrammi A C *ad* altitudinem parallelogrammi E G = 1 *ad* 1: præterea ductus ex quo producitur parallelogrammum A C *ad* ductum primum = 1 *ad* 1: Denique ductus primus *ad* ductum ex quo producitur parallelogrammum E G = 1 *ad* 1: ergo per theor. 3. cap. 1. partis 5. Ideæ parallelogrammum A C *ad*

pa-

parallelogrammum E G habet rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum vna est 1 *ad* 1, altera est 1 *ad* 1, tertia est 1 *ad* 1, quarta est 1 *ad* 1: sed per probl. 3. cap. 3. partis 4. Ideæ ratio composita ex dictis quatuor rationibus est ratio 1 *ad* 1: ergo parallelogrammum A C *ad* parallelogrammum E G = 1 *ad* 1: sed 1 = 1: ergo parallelogrammum A C = parallelogrammo E G. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXVII. Propositio XXXVII.

T*Riangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.*

Hoc theorema continetur theoremate 28, quemadmodum theorema 25 continetur theoremate 26, adeoque planè superflua foret eius demonstratio.

Theorema XXVIII. Propositio XXXVIII.

T*Riangula in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia.*

Triangula A B C, & D E F habeant bases A B, & D E inter se æquales, & præterea altitudines sint æquales inter se. Fig. 20

Dico triangulum A B C = triangulo D E F.

Demonstratio. Per hypothesim basis A B *ad* basim D E = 1 *ad* 1: item altitudo trianguli A B C *ad* altitudinem trianguli D E F = 1 *ad* 1: præterea ductus ex quo producitur triangulum A B C *ad* ductum primum = 1 *ad* 2: item ductus primus *ad* ductum ex quo producitur triangulum

DEF = 2 *ad* 1 : ergo per theor. 3. cap. 1. partis 5. Ideæ triangulum ABC *ad* triangulum DEF habet rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum vna est 1 *ad* 1, altera est 1 *ad* 1, tertia est 1 *ad* 2, quarta est 2 *ad* 1 : sed ex probl. 3. cap. 3. partis 4. Ideæ, hæc ratio composita = rationi 1 *ad* 1 : ergo triangulum, ABC *ad* triangulum DEF = 1 *ad* 1 : atqui 1 = 1 : ergo trangulum ABC = triangulo DEF. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXIX. Propositio XXXIX.

Triangula æqualia in eadem basi & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Hoc theorema est pars immediate subsequentis theorematis, quemadmodum theorema 25 est pars theorematis 26.

Theorema XXX. Propositio XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Triangulum ABC sit æquale triangulo DEF, prætera bases AB & DE sint in directum, siue positæ in eadem recta linea AE, atque triangula ABC, et DEF cadant ad eamdem partem rectæ AE, denique ducta sit recta CF.

Fig. 20.

Dico rectam CF esse parallelam rectæ AE.

Constructio. Altitudo trianguli ABC sit CX : item altitudo trianguli DEF sit FZ.

Demonstratio. Per theor. 3. cap. 1. partis 5. Ideæ triangulum ABC *ad* triangulum DEF habet rationem com-

positam ex quatuor rationibus quarũ vna A B *ad* D E, altera C X *ad* F Z, tertia ductus ex quo producitur triangulũ A B C *ad* ductum primum, quarta ductus primi *ad* ductum ex quo producitur triangulũ D E F: sed per hypothesim ratio A B *ad* D E = 1 *ad* 1: itẽ ratio ductus ex quo producitur triangulum A B C *ad* ductum primum = 1 *ad* 2: item ratio ductus primi *ad* ductum ex quo producitur triangulum D E F = 2 *ad* 1: ergo triangulum A B C *ad* triangulum D E F habet rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum vna est 1 *ad* 1, altera C X *ad* F Z, tertia est 1 *ad* 2, quarta est 2 *ad* 1: sed etiam per hypothesim ratio trianguli A B C *ad* triangulum D E F = 1 *ad* 1: ergo ratio composita ex rationibus 1 *ad* 1, item 1 *ad* 2, item 2 *ad* 1, item C X *ad* F Z = rationi 1 *ad* 1: atqui per probl. 3. cap. 3. partis 4. Ideæ, ratio composita ex rationibus 1 *ad* 1, item 1 *ad* 2, item 2 *ad* 1, item C X *ad* F Z = rationi C X *ad* F Z: ergo C X *ad* F Z = 1 *ad* 1: sed 1 = 1: ergo C X = F Z: atqui per constructionem C X est distantia puncti C à recta A E, item F Z est distantia puncti F ab eadem recta A E: ergo puncta C & F æqualiter distant ab eadem recta A E: igitur rectæ C F & A E sunt parallelæ inter se. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXI. Propositio XLI.

SI parallelogrammum, & triangulum eamdem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum trianguli duplum erit.

Parallelogrammum X, & triangulum Z habeant bases Fig. 21

A B, & E F inter se æquales, & præterea altitudo parallelogrammi X sit æqualis altitudini trianguli Z.

Dico parallelogrammum X esse duplum trianguli Z.

Demonstratio. Per hypothesim basis A B *ad* basim E F = 1 *ad* 1: item altitudo parallelogrammi X *ad* altitudinem trianguli Z = 1 *ad* 1: præterea ductus ex quo producitur parallelogrammum X *ad* ductum primum = 1 *ad* 1: denique ductus primus *ad* ductum ex quo producitur triangulum Z = 2 *ad* 1: ergo per theor. 3. cap. 1. partis 5. Ideæ parallelogrammum X *ad* triangulum Z habet rationem compositam ex quatuor rationibus quarum vna est 1 *ad* 1, altera 1 *ad* 1, tertia 1 *ad* 1, quarta 2 *ad* 1: sed per probl. 3. cap. 3. partis 4. Ideæ hæc ratio composita = rationi 2 *ad* 1: ergo parallelogrammum X *ad* triangulum Z = 2 *ad* 1: sed 2 est duplum 1: ergo parallelogrammum X est duplum trianguli Z. Quod erat demonstrandum.

Problema XI. Propositio XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Fig. 22 Sit datum triangulum A B C, & præterea ductus sit angulus K: denique datæ sint duæ rectæ lineæ X, & Z.

Opporteat construere parallelogrammum E F G H, ità vt angulus H E F = angulo K, & præterea parallelogrammum E F G H *ad* triangulum A B C = X *ad* Z.

Solutio. In vno latere anguli K per probl. 2. hic, notentur puncta L, & M, ità vt K L = X, & K M = 2 Z. In altero vero latero anguli K notatur punctum P, ita vt K P = A B,

= A B; atque ducta recta L O per probl. 10. hic, ducatur recta M P parallela rectæ L O occurrens lateri K P in puncto O. Deinde in recta A B producta abſcindatur E F æqualis K O, & per probl. 9. hic, fiat angulus H E F æqualis angulo K. Denique per probl. 10. hic, ponatur recta F G parallela rectæ E H; & altera recta ipſi A F parallelæ tranſiens per punctum C occurrat rectæ E H in puncto H, & rectæ F G in puncto G. Erit figura E F G H parallelogrammum, quod petebatur.

Placuit hoc problema vniuerſalius proponere, quam ab Euclide proponatur, vt aliquo modo mereatur locum, quem obtinet; præſertim cum ſolutio nullum à præcedentibus diuerſum problema requirat, atque demonſtratio habeatur ex Logiſticæ theorematibus paſſim adhibitis in præcedentium propoſitionum demonſtrationibus. Vt ad Euclidis caſum reſtringatur ſatis eſt ſupponere X = Z.

Demonſtratio. Per ſolutionem recta M P eſt parallela rectæ L O: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ angulus K M P = angulo K L O: item angulus K P M = angulo K O L: ergo per theor. 5. partis 3. Ideæ triangulum K M P eſt ſimile triangulo K L O: ergo K L *ad* K M = K O *ad* K P: ſed per ſolutionem patet K L *ad* K M = X *ad* 2 Z, item K O *ad* K P = E F *ad* A B: ergo E F *ad* A B = X *ad* 2 Z: Iam verò per theor. 3. partis 5. Ideæ, parallelogrammum E G *ad* triangulum A B C habet rationem compoſitam ex baſi E F *ad* baſim A B, item ex altitudine parallelogrammi E G *ad* altitudinem trianguli A B C, item ex ductu, ex quo producitur parallelogrãmum E G *ad* ductum primum, ac deniq; ex ducto primo *ad* ductum ex quo producitur triangulum

A B C:

A B C: sed iam ostensum est E F *ad* A B = X *ad* 2 Z: item, quia inter easdem parallelas sunt, patet altitudinem parallelogrammi E F *ad* altitudinem trianguli A B C = 1 *ad* 1: item ductus ex quo parallelogrammum E G producitur *ad* ductum primum = 1 *ad* 1: ac denique ductus primus *ad* ductum, ex quo producitur triangulum A B C = 2 *ad* 1: ergo parallelogrammum E G *ad* triangulum A B C habet rationem compositam ex rationibus X *ad* 2 Z, item 1 *ad* 1, item 1 *ad* 1, item 2 *ad* 1: sed per probl. 3. cap. 3. partis 4. Ideæ hæc ratio composita = rationi X *ad* Z: ergo parallelogrammum E G *ad* triangulum A B C = X *ad* Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXII. Propositio XLIII.

OMnis parallelogrammi spatij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Fig. 23 Parallelogrammi A B C D diameter sit A C, quam in eodem puncto E secent duæ rectæ F G, & H I, quarum prior sit parallela rectæ A B occurrens rectis A D & B C in punctis F, & G, altera verò H I sit parallela rectæ B C, atque occurrat rectis A B, & D C in punctis H, & I.

Dico parallelogrammum E D = parallelogrammo E B.

Demonstratio. Per prop. 34. hic, triangulum A C D = triangulo A C B: item triangulum A E F = triangulo A E H: ac denique triangulum E C I = triangulo E C G: ergo triangulum A C D − A E F − E C I = triangulo A C B − A E H − E C G: atqui triangulum A C D − A E F

A E F − E C I = parallelogrammo E D: item triangulum A C B − A E H − E C G = parallelogrammo E B: ergo parallelogrammum E D = parallelogrammo E B. Quod erat demonſtrandum.

Problema XII. Propoſitio XLIV.

AD datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare.

Sit datum triangulum A B C, & recta E F, præterea datus ſit angulus K, & rectæ lineæ X, & Z. Fig. 24. 25. & 26.

Opporteat ſupra rectam E F deſcribere parallelogrammum F H, ità vt parallelogrammum F H *ad* triangulum A B C habeat proportionem, quam recta X habet *ad* rectam Z.

Solutio. Per probl. 11. ſupra rectam E F productam, ſi opus fuerit, fiat parallelogrammum E M N O, ita vt angulus O E M = angulo K, & præterea parallelogrammum E N *ad* triangulum A B C = X *ad* Z: Deinde ducatur recta O F, quæ producta ſi opus fuerit occurrat rectæ N M ſimiliter productæ in puncto D. Denique per probl. 10. hic, ducatur recta F G parallela rectæ E O. Item per punctum D, ducatur recta H G parallela rectæ E F, atque rectæ O E productæ ſi opus fuerit, occurrens in puncto H. Denique rectæ F G, & O N productæ, ſi opus fuerit, ſibi occurrant in puncto R. Erit H G R O parallelogrammum, quod petitur.

Demonſtratio. Vel punctum F cadit intra puncta E, & M: vel punctum F cadit extra puncta E, & M. Si primum

Fig.24 & 25. per propositionem præcedentem F H = F N : ergo vtrinque addendo idem parallelogrammum E R, etiam F H + E R = E R + F N: sed F H + E R = H G R O : item E R + F N = E M N O : ergo parallelogrammum H G R O = parallelogrammo E M N O : sed per solutionem parallelogrammum E M N O *ad* triangulum A B C = X *ad* Z : ergo etiam parallelogrammum H G R O *ad* triangulum A B C = X *ad* Z : sed etiam ex solutione satis patet angulum E H G = angulo K : item rectam H G = rectæ E F : igitur supra rectam datam E F, vel quod idem est supra rectam H G datæ rectæ E F æqualem, constructum parallelogrammum H G R O habet angulum O H G æqualem angulo dato K, & prætereà parallelogrammum illud H G R O *ad* triangulum A B C = X *ad* Z. Si autem punctum M cadat inter puncta E & F: Rursus ex propositione præcedenti D R = D E : ergo H N + D R = D E + H N : sed H N + D R = H G R O : item D E + H N = E M N O : ergo parallelogrammum H G R O = parallelogrammo E M N O : atqui per solutionem parallelogrammum E M N O *ad* triangulum A B C = X *ad* Z : ergo parallelogrammum H G R O *ad* triangulum A B C = X *ad* Z ; & iterum satis manifestum est angulum O H G = angulo K , atque etiam rectam H G = datæ rectæ E F. Quod erat demonstrandum.

Fig.24 & 26.

Problema XIII. Propositio XLVI.

R*Ectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.*

Fig.25 Data sit quæuis figura plana, atque rectis lineis vndique termi-

terminata exempli gratia figura A B C D: præterea datus sit angulus K.

Opporteat facere parallelogrammum E F G H æquale datæ figuræ rectilineæ, ita vt angulus E F G æquetur angulo K. Fig. 27

Solutio. Primo ex vertice anguli A ad singulos alios vertices angulorum, qui in data figura rectilinea inueniuntur, ducantur rectæ lineæ: atque ita data figura rectilinea diuidatur in triangula. Quo facto in exemplo proposito habentur duo triangula D A C, & C A B. Deinde assumendo pro libitu quamlibet rectam E F, per probl. 12. hic, supra rectam E F fiat parallelogrammum E F I L ęquale triangulo D C A, ità vt angulus E F I æquetur angulo K. Rursus per probl. 12. hic, supra rectam L I fiat parallelogrammum L I G H æquale triangulo C A B, ita vt angulus L I G æquetur angulo K. Erit figura E F G H parallelogrammum, quod petitur.

Demonstratio. Ex solutione patet rectam E F esse parallelam rectæ L I: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ angulus E F I † L I F = duobus rectis angulis: sed angulus E F I = angulo L I G; quandoquidem singuli æquentur eidem angulo K: ergo angulus L I G † L I F = duobus rectis: ergo per theor. 2. partis 3. Ideæ puncta F, I, G, sunt in directum, siue quod idem est lineæ F I, & I G, constituunt vnam rectam lineam: similiter patet puncta E, L, H esse in directum: igitur cum per solutionem F I & E L sint parallelæ inter se patet etiam F G, & E H esse rectas parallelas inter se: sed etiam rectæ E F, & H G sunt parallelæ inter se, quia per solutionem sunt parallelæ eidem tertiæ lineæ L I: ergo figu-

ra E F G H est parallelogrammum: sed quia per solutionem E F I L = D C A, & insuper L I G H = A C B, patet E F G H = A B C D: ergo parallelogrammum E F G H = figuræ A B C D: atqui per solutionem angulus E F G = angulo K: ergo parallelogrammum E F G H æquatur figuræ A B C D, & insuper habet angulum E F G æqualem angulo K. Quod erat demonstrandum.

Problema XIV. Propositio XLVI.

D*ata recta linea quadratum describere.*

Sit data recta linea A B.

Fig. 28 Opporteat describere quadratum, cuius vnum latus sit A B.

Solutio. Ex punctis A, et B per probl. 6. hic, ducantur rectæ A D et B C, quæ singulæ sint perpendiculares ad rectam A B, atque ipsi æquales: Denique ducatur recta D C: Erit figura A B C D quadratum; quod petitur.

Demonstratio. Cum per constructionem singuli anguli A, et B recti sint patet angulum A † B = duobus rectis: ergo per theor. 4. partis 3. Ideæ lineæ A D, et B C sunt parallelæ inter se: sed quoniam per solutionem rectæ A D, et B C sunt æquales inter se, et singulæ sunt perpendiculares ad eamdem rectam A B, etiam A B est parallela ipsi D C: ergo figura A B C D est parallelogrammum: ergo per prop. 34 hic, angulus A = angulo C: item angulus B = angulo D: item recta A B = rectæ D C: atqui per solutionem anguli, A et B recti sunt, et insuper lineæ D A, & C B singulæ æquentur rectæ A B: ergo in parallelogrammo A B C D

singuli

singuli anguli recti sunt, et insuper singula latera sunt inter se æqualia: ergo figura A B C D est quadratum, cuius vnum latus est A B. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXIII. Propositio XLVII.

IN rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

In triangulo A B C, angulus A B C rectus sit. Fig. 29.

Dico quadratum A B simul cum quadrato B C æquari quadrato A C.

Constructio. Ducta sit recta B D perpendicularis ad A C illi occurrens in D.

Demonstratio. Per theor. 10. partis 3. Ideæ, A C *ad* A B = A B *ad* A D: item A C *ad* B C = B C *ad* D C: igitur per axioma 3; partis 4. Ideæ, A C *in* A D = A B 2: item A C *in* D C = B C 2: ergo A C *in* A D *et* + A C *in* D C = A B 2 + B C 2: sed A C *in* A D *et* + A C *in* D C = A C *in* A D + D C = A C *in* A C, quandoquidem A C = A D + D C: ergo A C 2 = A B 2 + B C 2. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

EVclidis propria laus est, quod ab alijs inuentas mathematicas veritates colligendo, ordinando, augendo, composuerit elementorum libros suo inscriptos nomine. Thales Milesius præter alias libri primi propositiones 5, 15, 26 in-

26 inueniſſe dicitur. Oenopidi adſcribitur prop. 12, & 23 libri primi. Atque, vt refert Laertius, Pythagoras Samius primus Geometriam à materia abſtraxit, in qua mentis eleuatione inuenit libri primi propoſitiones 32, 44, 47, 48. Et teſte Apollodoro apud Laertium propoſitionis 47 inuentione tanta lætitia affectus eſt, vt hecatombem immolauerit; alij alias Euclideas propoſitiones excogitarunt: verum ex cæteris vix vlla inuentoris ſui nomen retinuit; propoſitio 47 ob eximios eius vſus celeberrima vſque in hodiernum diem paſſim Pythagorica dicitur, eadem propoſitio ſub maiori vniuerſalitate proponitur in libro 6. Euclidis, ſed tamen non ſub ea vniuerſalitate, quam admittit iuxta Logiſticæ methodum, neque enim tantum quadratis, aut alijs planis, atque ſimilibus ſuperficiebus trianguli rectanguli latera pro baſi habentibus conuenit proprietas, quæ in propoſitione aſſeritur; ſed hæc proprietas aut altera vniuerſalior proponi, atque demonſtrari poteſt de quibuſcunque quantitatibus. Sub hac maxima vniuerſalitate à me proponitur, atque demonſtratur in propoſitione 49, quæ apud Euclidem non inuenitur, eam tamen addere volui reliquis Euclideis propoſitionibus Logiſticæ methodo hactenus demonſtratis, tum quia ex his omnibus præſtantiſſimæ affinis eſt, quippe quæ nihil aliud continet, quam propoſitionem 47 reuocatam ad maximam vniuerſalitatem; tum quia Euclidea methodo non videtur demonſtrabilis, atque adeò clarius appareat, Logiſticæ Methodum non tantum magis compendiatè, ac facile præſtare poſſe, quod difficilius poteſt methodus Euclidea: verum etiam Logiſticæ methodo ſatis commode eo perueniri, quo non aſcendit altera.

Theo-

Theorema XXXIV. Propositio XLVIII.

SI quadratum, quod describitur ab vno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Sit triangulum ABC, ita tamen, vt quadratum AC sit æquale duobus quadratis AB, & BC simul sumptis.

Dico angulum ABC rectum esse.

Constructio. Ducta sit recta BD perpendiculariter oc- Fig. 29
currens rectæ AC in puncto D, atque in recta DB producta, si opus fuerit, notatum sit punctum F, ita vt angulus AFC rectus sit.

Demonstratio. Per constructionem angulus AFC est rectus: ergo per prop. 47. hic, $AC^2 = AF^2 + FC^2$: sed per hypothesim etiam $AC^2 = AB^2 + BC^2$: ergo $AF^2 + FC^2 = AB^2 + BC^2$: atqui per constructionem, & prop. 47. hic, $AF^2 = AD^2 + DF^2$: item $FC^2 = DC^2 + DF^2$: item $AB^2 = AD^2 + DB^2$: item $BC^2 = DC^2 + DB^2$: ergo $AD^2 + DF^2 + DC^2 + DF^2 = AD^2 + DB^2 + DC^2 + DB^2$: ergo vtrinque auferendo $AD^2 + DC^2$, etiam $2DF^2 = 2DB^2$: ergo $DF^2 = DB^2$: ergo $DF = DB$: ergo punctum F non est diuersum à puncto B: ergo angulus ABC non est diuersus ab angulo AFC: sed per constructionem angulus AFC est rectus: ergo etiam angulus ABC est rectus. Quod erat demonstrandum.

Theo-

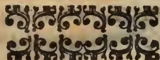
Theorema XXXV. Propositio XLIX.

Sint duæ series qualiumcunque trium proportionalium terminorum habentes primum terminum communem, atque duo ultimi termini simul sint æquales primo communi termino, erit productum ex primo termino ducto in se æquale aggregato ex productis, quæ oriuntur ex singulis medijs terminis ductis in se.

Sint qualescunque quantitates A C, A B, B C, D C, ità tamen ut A C *ad* A B = A B *ad* A D, & præterea A C *ad* B C = B C *ad* D C, ac denique A D † D C = A C.

Dico A C 2 = A B 2 † B C 2.

Demonstratio. Per hypothesim A C *ad* A B = A B *ad* A D, & præterea A C *ad* B C = B C *ad* D C: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ A C *in* A D = A B 2, & etiam A C *in* D C = B C 2: ergo A C *in* A D *et* † A C *in* D C = A B 2 † B C 2: atqui A C *in* A D, *et* † A C *in* D C = A C *in* A D † D C = A C *in* A C, quandoquidem per hypothesim A D † D C = A C: ergo A C *in* A C, hoc est A C 2 = A B 2 † B C 2. Quod erat demonstrandum.



ELE-

ELEMENTORVM EVCLIDIS
LIBER SECVNDVS
Logiſticis diſcurſibus demonſtratus
A
GRIMALDO DE NOBILIBVS.



Ingulæ propoſitiones præcedentis libri à me proponuntur, vt inueniuntur apud Euclidis interpretes, atque ſub eadem vniuerſalitate reſumuntur, & demonſtrantur. In hoc libro paulò aliter procedo; ſingulæ enim propoſitiones proponuntur quidem, vt habentur apud Euclidem, aut eius interpretes; ſed propemodum ſingulæ reſumuntur, ac demonſtrantur ſub maiori vniuerſalitate. Ex his vniuerſalioribus propoſitionibus expreſsè non infero Euclideas magis reſtrictas; id enim videbatur planè ſuperfluum, quandoquidem demonſtrationes meæ ſupponant aliquam notitiam illius logiſticæ, qua vtor, quæque abundè ſufficit, vt à me demonſtratæ, vniuerſaliores propoſitiones reſtringantur ad minus vniuerſales ipſis reſpondentes, quæ proponuntur ab Euclide.

Theo-

Theorema I. Propositio I.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque partes; rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis æquale est rectangulis, quæ recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D, E, ita tamen vt A † B † C = D.

Dico A *in* E, *et* † B *in* E, *et* † C *in* E = D *in* E.

Demonstratio. Ex Logisticis scriptionibus satis patet A *in* E, *et* † B *in* E, *et* † C *in* E = A † B † C *in* E: sed quoniam per hypothesim A † B † C = D, per axioma 3. partis 2. Ideæ, A † B † C *in* E = D *in* E; ergo A *in* E, *et* † B *in* E, *et* † C *in* E = D *in* E. Quod erat demonstrandum.

Theorema II. Propositio II.

SI recta secta sit vtcunque; rectangula, quæ tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, ita vt A † B = C.

Dico A *in* C, *et* † B *in* C = C 2.

Demonstratio. Ex Logisticis scriptionibus patet A *in* C, *et* † B *in* C = A † B *in* C: sed quoniam per hypothesim A † B = C, per axioma 3. partis 2. Ideæ A † B *in* C = C *in* C = C 2: ergo A *in* C *et* † B *in* C = C 2. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema III. Propositio III.

SI recta linea vtcunque secta fuerit; rectangulum tota, & vna eius parte contentum æquale est & rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit, quadrato.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, ità vt A † B = C.

Dico C *in* A = B *in* A *et* † A 2.

Demonstratio. Per hypothesim B † A = C: ergo per axioma 3. partis 2. Ideæ B † A *in* A = C *in* A: sed B † A *in* A = B *in* A *et* † A 2: ergo C *in* A = B *in* A *et* † A 2. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV. Propositio IV.

SI recta linea secta fuerit vtcunque; quadratum, quod fit à tota, æquale erit & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur, rectangulo.

Qualescunque sint quantitates A, & B.

Dico A † B *q* = A 2 † B 2 *et* † A *in* 2 B.

Demonstratio. A † B *q* = A † B *in* A † B: sed A † B *in* A † B = A 2 † B 2 *et* † A *in* 2 B: ergo A † B *q* = A 2 † B 2 *et* † A *in* 2 B. Quod erat demonstrandum.

Theorema V. Propositio V.

SI recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vna cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur,

æquale

æquale eſt ei, quod à dimidia fit, quadrato.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, ita vt A ≕ B † C. Dico A 2 ≕ A † B *in* C *et* † B 2.

Demonſtratio. Per hypotheſim A ≕ B † C: ergo vtrinque addendo B, etiam A † B ≕ 2 B † C: ergo per axioma 3. partis 2. Ideæ A † B *in* C ≕ 2 B † C *in* C ≏ C 2 *et* † C *in* 2 B: ergo vtrinque addendo B 2, etiam A † B *in* C *et* † B 2 ≕ B 2 † C 2 *et* † C *in* 2 B: ſed per theor. 4. hic, B † C *q* ≕ B 2 † C 2 *et* † C *in* 2 B: ergo B † C *q* ≕ A † B *in* C *et* † B 2: ſed quia per hypotheſim A ≕ B † C, etiam A 2 ≕ B † C *q*: ergo A 2 ≕ A † B *in* C *et* † B 2. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VI. Propoſitio VI.

SI recta linea bifariam ſecetur, atque ipſi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, & adiecta comprehenſum, vna cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adiecta conſtat, tanquam ab vna linea deſcribitur.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, ita tamen, vt A ≕ B.

Dico B † C *q* ≕ A † B † C *in* C *et* † B 2.

Demonſtratio. Per hypotheſim A ≕ B: ergo vtrinque addendo B † C, etiam A † B † C ≕ 2 B † C: ergo per axioma 3. partis 2. Ideæ A † B † C *in* C ≕ 2 B † C *in* C ≏ C 2 *et* † C *in* 2 B: ergo vtrinque addendo B 2, etiam A † B † C *in* C *et* † B 2 ≕ B 2 † C 2 *et* † C *in* 2 B: ſed per prop. 4. hic, B † C *q* ≕ B 2 † C 2 *et* † C *in* 2 B: ergo B † C *q*

≕ A

= A † B † C *in* C *et* † B 2. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VII. Propoſitio VII.

SI recta linea vtcunque ſecta fuerit, quæ à tota, & vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia ſunt, & rectangulo quod bis tota, & dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Qualeſcunque ſint quantitates A, & B.

Dico A † B *q et* † B 2 = A † B *in* 2 B *et* † A 2.

Demonſtratio. Per prop. 4. A † B *q* = A 2 † B 2 *et* † A *in* 2 B≏B *in* B *et* † A *in* 2 B *et* † A 2: ſed B 2 = B *in* B: ergo vtrinque addendo æqualia etiam A † B *q et* † B 2 = B *in* B *et* † B *in* B *et* † A *in* 2 B *et* † A 2: ſed B *in* B *et* † B *in* B = B *in* 2 B: ergo A † B *q et* † B 2 = B *in* 2 B *et* † A *in* 2 B *et* † A 2: ſed B *in* 2 B *et* † A *in* 2 B = A † B *in* 2 B: ergo A † B *q et* † B 2 = A † B *in* 2 B *et* † A 2. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VIII. Propoſitio VIII.

SI recta linea vtcunque ſecta fuerit, & quod quater tota & vna parte continetur rectangulum vna cum quadrato reliquæ partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, & dicta parte tanquam ex vna linea deſcribitur.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

Dico A † B *in* 4 B *et* † A 2 = A † 2 B *q*.

Demonſtratio. A † 2 B *q* = A † 2 B *in* A † 2 B ≏ A † 2 B *in* A *et* † A † 2 B *in* 2 B: ſed A † 2 B *in* A = A *in* 2 B

et † A 2; item A † 2 B *in* 2 B = A *in* 2 B *et* † 2 B *in* 2 B: ergo A † 2 B *q* = A *in* 2 B *et* † A 2 *et* † A *in* 2 B *et* † 2 B *in* 2 B ≏ 2 A *in* 2 B *et* † 2 B *in* 2 B *et* † A 2: sed 2 A *in* 2 B = A *in* 4 B; item 2 B *in* 2 B = B *in* 4 B: ergo A † 2 B *q* = A *in* 4 B *et* † B *in* 4 B *et* † A 2: sed A *in* 4 B *et* † B *in* 4 B = A † B *in* 4 B: ergo A † B *in* 4 B *et* † A 2 = A † 2 B *q* Quod erat demonstrandum.

Theorema IX. Propositio IX.

SI recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interijcitur.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, ita vt A = B † C. Dico A † C *q et* † B 2 *ad* A 2 † C 2 = 2 *ad* 1.

Demonstratio. Per hypothesim B † C = A: ergo B = A − C: ergo B 2 = A − C *q*: sed per theor. 1. appendicis lib. 1. Logisticæ, A − C *q* = A 2 † C 2 *et* − A *in* 2 C: ergo B 2 = A 2 † C 2 *et* − A *in* 2 C: atqui etiam per prop. 4. hic, A † C *q* = A 2 † C 2 *et* † A *in* 2 C: ergo A † C *q et* † B 2 = A 2 † C 2 *et* † A *in* 2 C *et* † A 2 † C 2 *et* − A *in* 2 C ≏ 2 A 2 † 2 C 2: sed 2 A 2 † 2 C 2 = A 2 † C 2 *in* 2: ergo A † C *q et* † B 2 = A 2 † C 2 *in* 2: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ A † C *q et* † B 2 *ad* A 2 † C 2 = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema X. Propositio X.

SI recta linea secetur bifariam, & ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur, quæ à tota cum adiecta, & adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adiecta constat, tanquam ab vna linea describitur.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, ita vt A = B.

Dico A † B † C *q et* † C 2 *ad* A 2 *et* † B † C *q* = 2 *ad* 1.

Demonstratio. Cum 3 A 2 = 2 A 2 † A 2, patet 3 A 2 † C 2 *et* † 2 A *in* C = 2 A 2 † A 2 † C 2 *et* † 2 A *in* C: sed per prop. 4. hic A † C *q* = A 2 † C 2 *et* † 2 A *in* C: ergo, 3 A 2 † C 2 *et* † 2 A *in* C = 2 A 2 *et* † A † C *q*: ergo vtrinque addendo A † C *q*, etiam 3 A 2 † C 2 *et* † 2 A *in* C *et* † A † C *q* = 2 A 2 *et* † A † C *q et* † A † C *q*: sed quoniam A *in* 2 A = 2 A 2, atque adeo A 2 *et* † A *in* 2 A = 3 A 2, patet 3 A 2 *et* † 2 A *in* C *et* † A † C *q* = A 2 *et* † A *in* 2 A *et* † 2 A *in* C *et* † A † C *q* ≏ A 2 *et* † 2 A *in* A † C *et* † A † C *q*: ergo A 2 *et* † 2 A *in* A † C *et* † A † C *q et* † C 2 = 2 A 2 *et* † A † C *q et* † A † C *q* ≏ A † C *q* † A 2 *in* 2: sed per prop. 4. hic, etiam A † A † C *q* = A 2 *et* † 2 A *in* A † C *et* † A † C *q*: ergo A † A † C *q et* † C 2 = A † C *q* † A 2 *in* 2: sed quia per hypothesim A = B, etiam A † A † C *q* = A † B † C *q*, & insuper A † C *q* = B † C *q*: ergo A † B † C *q et* † C 2 = B † C *q* † A 2 *in* 2: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ A † B † C *q et* † C 2 *ad* B † C *q et* † A 2 = 2 *ad* 1: Quod erat demonstrandum.

Pro-

Problema I. Propositio XI.

DAtam rectam lineam secare, ita vt quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Fig. 30 Sit data recta A B.

Oporteat illam secare in puncto C, ita vt A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Solutio. Per prop. 11. lib. 1. hic, ducatur recta A D, quæ sit perpendicularis ad A B, ita vt A D sit dimidia B A. Deinde ducta recta B D per prop. 2. lib. 1. hic, ex recta A B abscindatur recta A C æqualis differentiæ rectarum D B, & D A. Erit A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Demonstratio habetur prop. 14. de incommensurabilibus epist. 4.

Theorema XI. Propositio XII.

IN obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circà obtusum angulum, in quod scilicet productum, perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

In triangulo A D C angulus D rectus sit, atque recta A

Fig. 31 B occurrat rectæ D C in puncto B.

Dico A C 2 = A B 2 † B C 2 *et* † C B *in* 2 B D.

Demonstratio. Per prop. 4. hic, C B † B D *q* = B D 2 † C B 2

† C B 2 *et* † C B *in* 2 B D: ſed per prop. 47. libri præcedentis A C 2 = A D 2 *et* † D B † B C *q*: ergo A C 2 = A D 2 † B D 2 † C B 2 *et* † C B *in* 2 B D: atqui per prop. 47. libri præcedentis etiam A B 2 = A D 2 † D B 2: ergo A C 2 = A B 2 † C B 2 *et* † C B *in* 2 B D. Quod erat demonſtrandum.

Si placeret hoc theorema vniuerſalius proponere, ac demonſtrare, poſſet dici. Qualeſcunquè ſint quantitates A C, A B, A D, C B, B D, ita tamen vt A C 2 = A D 2 *et* † C B † B D *q*; item A B 2 = A D 2 † D B 2, verum erit, quod A C 2 = A B 2 † B C 2 *et* † C B *in* 2 B D. In hunc modum propoſiti theorematis demonſtratio habetur ſi in allata demonſtratione citetur hypotheſis, vbi modo citatur prop. 47. libri præcedentis.

Theorema XII. Propoſitio XIII.

IN acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ ſunt circà acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.

In triangulo A D C angulus C D A rectus ſit, atque recta A B occurrat rectæ C D productæ in aliquo puncto B. Fig. 32

Dico A C 2 = C B 2 † B A 2 *et* − C B *in* 2 B D.

Demonſtratio. Per prop. 47. libri præcedentis B A 2 = B D 2 † D A 2: ſed per prop. 4. hic C B 2 = C D 2 † B D 2 *et* † C D *in* 2 B D: ergo B A 2 † C B 2 = B D 2 † D A 2

DA 2 † CD 2 † BD 2 *et* † CD *in* 2 BD ≏ DA 2 † CD 2 † 2 BD 2 *et* † CD *in* 2 BD: sed quia 2 BD 2 = BD *in* 2 BD, & insuper BD *in* 2 BD *et* † CD *in* 2 BD = BD † CD *in* 2 BD, manifestum est 2 BD 2 *et* † CD *in* 2 BD = BD † CD *in* 2 BD ≏ CB *in* 2 BD, cum BD † CD = CB: ergo BA 2 † CB 2 = DA 2 † CD 2 *et* † CB *in* 2 DB: ergo BA 2 † CB 2 *et* – CB *in* 2 DB = DA 2 † CD 2: sed per prop. 47. lib. præcedentis etiam AC 2 = DA 2 † CD 2: ergo AC 2 = BA 2 † CB 2 *et* – CB *in* 2 DB. Quod erat demonstrandum.

Si placeret, hoc theorema vniuersalius proponere, & demonstrare, dici posset. Qualescunque sint quantitates AC, AB, AD, CD, BD, ità tamen vt AC 2 = CD 2 † DA 2 & insuper BA 2 = BD 2 † DA 2, ac denique CB = CD † DB. Verum erit, quod AC 2 = CB 2 † BA 2 *et* – CB *in* 2 BD. Pro cuius demonstratione sufficit in præcedenti discursu citare hypothesim, vbi citatur propositio 47. libri præcedentis.

Problema II. Propositio XIV.

D*Ato rectilineo æquale quadratum constituere.*

Data sit figura X rectis lineis terminata.

Oporteat describere quadratum Z æquale figuræ X.

Fig. 33 Solutio. Primo per prop. 42. libri præcedentis describatur rectangulum ABCD æquale figuræ X. Deinde producatur recta BC vsque in E, vt CD = CE, & per prop. 10. libri præcedentis recta BE secetur bifariam in F. Tertio centro F radio FB describatur semicirculus, cui DC producta

ducta occurrat in puncto H. Denique per prop. 46. libri præcedentis ſupra rectam CH deſcribatur quadratum Z. Erit Z quadratum, quod petitur.

Demonſtratio. Per theor. 10. partis 3. Ideæ BC *ad* CH = CH *ad* CE : ſed CE = CD: ergo BC *ad* CH = CH *ad* CD: ergo per axioma 3. partis 3. Ideæ, BC *in* CD = CH2: ſed BC *in* CD = rectangulo ABC; item CH 2 = quadrato facto ſupra CH, hoc eſt quadrato Z: ergo rectangulum ABC = quadrato Z: ſed etiam figura X = rectangulo ABC: ergo figura X = quadrato Z. Quod erat demonſtrandum.

EPISTOLA SEPTIMA

FRANCISCVS ZECCADORVS

R. P. ÆGIDIO FRANCISCO DE GOTTIGNIES

Societatis Ieſu. S.



ON omninò ſterilis, aut otio tantum oblectando conducens, cura in me ſitim incendit animaduertendi, quo pacto materiem de quantitatibus expertibus communi menſura pertractet Logiſtica tua, Ariadnæ, videlicet ſtamen, cuius ductu Matheſeos tutò labyrinthum ingredimur. Quoniam verò tua methodo, compendiaria videlicet via, huiuſce ſcientiæ fines ingreſſus, iniquo prorſus animo conquieſcebam in ijs demonſtrationibus, quas grauiſſimi cæteroqui, ac noſtræ pene faculta-

tis Antistites, Euclidis interpretes afferunt in libris ad Arithmeticam pertinentibus: ausus fueram ex his libris aliquos, nisi præstantioribus, mihi certè magis arridentibus demonstrationibus illustrare. Arduam, secus ac opinabar, prouinciam expertus sum; in animum enim induxeram, elementares veritates multo faciliori negotio demonstrari posse, quam sublimiora Apollonij Pergæi cogitata, ex quibus plura Selegeram exercitationis gratia inferenda ex ijs, quæ tradis in tuæ Logisticæ Idea. An igitur magis pronus est, inquiebam, adytus ad arcana, & quasi Sacrarium, quam ad ipsum Matheseos limen? Cum ita fluctuarem animo, illa suborta est cogitatio, non ex ipsa rei natura Conicas Pergæi Sectiones obuias mihi, & quasi expositas visas fuisse, sed ex tramite, vt ita dicam, accliui, & nihil salebroso ad huiusmodi doctrinæ pænetralia, strato in tuæ Logisticæ Idea: huiusmodi verò semitam minimè recludi ducentem ad inuestiganda illa, quæ vulgarium numerorum propria quodamodò sunt, aut illis aptantur, ita vt ad alias quantitates non æquè pertineant, aut demùm ijs tantummodò nunquam conueniant, licèt in alijs siue continuis, siue discretis quantitatibus inueniri possint; Ad hæc autem proprietatum genera spectare videbantur illa, quæ mihi molesta præ cæteris in Euclidis elementis accidebant. Quamobrem studium me cæperat, aliquam ex his, ac præsertim celebritate clariorem propositionem videndi expugnatam, vt ex ea docerer artificium, quo reliquas superarem. Neque me fefellit consilium meum; postquam enim auidissimis, vt omnia tua, vsurpanda oculis exhibuisti theoremata quædam de quantitatibus communi mensura carentibus, videor mihi satis feliciter in ijs, quæ demonstrare institueram,

tueram, elaborasse. Verùm an fausta mihi cesserit alea, ex te nosse ambio; ideoque ex pluribus septimum Euclideorum elementorum librum, aliorum, quos perinde demonstraui, iudicio tuo specimen subijcio, vt si albo hic à te calculo donetur, spem lucis reliquis faciat; si nigram illi notam inuras cum cæteris delitescat.

ELEMENTORVM EVCLIDIS
LIBER SEPTIMVS
Logisticis discursibus demonstratus
A
FRANCISCO ZECCADORO.

NOtandum. *Quando in demonstrationibus huius libri septimi Euclidis citantur axiomata, atque expressè aliud non dicitur, illa axiomata intelligenda sunt, quæ annotantur initio tractatus de commensurabilibus, & incommensurabilibus quantitatibus pag.* 34. & 35. *Ibidemque propositæ definitiones retinentur.*

Theorema I. Propositio I.

S*I duobus numeris inæqualibus propositis detrahatur semper minor de maiore alterna quadam detractione; neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad ventum sit ad unitatem: primi inter se erunt dati numeri.*

Sint duo numeri vulgares integri A & B: atque numerus A sit maior numero B. Deinde diuidendo A per B producatur integer F, atque pro residuo remaneat integer C. Rursus priorem diuisorem B diuidendo per inuentum residuum C producatur integer G, atque pro residuo remaneat integer D. Denique, hoc ordine, in diuisione adhibitum diuisorem diuidendo per residuum, eiusdem diuisionis, continuando diuisiones, tandem pro residuo remaneat vnitas.

Dico numeros A & B non habere communem mensuram diuersam ab vnitate.

Constructio. $\frac{A}{B} = F \dagger C$: item $\frac{B}{C} = G \dagger D$: item $\frac{C}{D} = K \dagger E$: item $\frac{D}{E} = P \dagger 1$. Praeterea quiuis numerus, qui metitur A & B, sit X.

Demonstratio. Per constr. $\frac{A}{B} = F \dagger C$: ergo $\frac{A}{B} - C = F$: ergo $A - C = B$ *in* F: sed per constr. X metitur B, adeoque per 3. axioma X metitur B *in* F: ergo X metitur $A - C$; sed etiam per constr. X metitur A: ergo per 2. axioma X metitur C. Rursus, quoniam per construc. $\frac{B}{C} = G \dagger D$, etiam $\frac{B}{C} - D = G$: ergo $B - D = C$ *in* G: sed iam ostensum est X metiri C, adeoque per 3. axioma X metiri C *in* G: ergo X metitur $B - D$: sed per constr. etiam X metitur B: ergo per 2. axioma X metitur D. Rursus per constr. $\frac{C}{D} = K \dagger E$: ergo $\frac{C}{D} - E = K$: ergo $C - E = D$ *in* K: sed prius ostensum est X metiri D, adeoque per 2. axioma X metiri D *in* K: ergo X metitur $C - E$: atqui etiam ostensum est X metiri C: ergo per 2. axioma X metitur E. Rursus per constr. $\frac{D}{E} = P \dagger 1$: ergo $\frac{D}{E} - 1 = P$: ergo $D - 1 = E$ *in* P: sed quoniam ostensum est X metiri E, etiam per 3. axioma X metitur E in P: ergo X metitur $D - 1$:

sed

sed iam demonstratum est X metiri D: ergo X metitur 1: ergo X, vel est vnitas, vel minor vnitate: ergo X non est numerus integer diuersus ab vnitate: sed per constr. X est quiuis numerus, qui est mensura A & B: ergo nullus numerus integer ab vnitate diuersus metitur A & B: ergo A & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc facile patet, quod si numeri A & B habeant aliquam communem mensuram diuersam ab vnitate; tandem ad illam deuenietur, continuando diuisiones ordine præscripto in propositione. Etenim si ad nullum talem numerum perueniatur, etiam nullam talem mensuram habent: ergo si aliquam talem mensuram habent, ad illam peruenietur, atque tandem pro residuo habebitur ille numerus.

Problema I. Propositio II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Dati sint duo numeri vulgares integri A & B, qui habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Oporteat inuenire maximum vulgarem integrum numerum, qui metiatur A & B.

Solutio. Maiorem A diuidendo per minorem B producatur integer F, atque pro residuo remaneat integer C. Rursus priorem diuisorem B diuidendo per residuum C producatur

tur integer G, atque pro residuo remaneat integer D. Denique, hoc ordine, in diuisione adhibitum diuisorem diuidendo per residuum eiusdem diuisionis, continuentur diuisiones, donec nullum remaneat residuum: atque diuisor huius vltimæ diuisionis, ex qua nullum remanet residuum, sit vulgaris integer E. Dico, numerorum A & B maximam communem mensuram esse E.

Demonstratio. Per hypot. numeri A & B habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo, per corollar. propos. 1. præscripto ordine continuando diuisiones, tandem deuenietur ad aliquem diuisorem E, qui vnitate maior sit, & nullum relinquat residuum. Itaque $\frac{A}{B} = F + C$; item $\frac{B}{C} = G + D$; item $\frac{C}{D} = K + E$; denique $\frac{D}{E} = L$, & nullum relinquatur residuum: atq; maxima communis mensura numerorum A & B sit aliquis integer Z. Quoniam igitur $\frac{A}{B} = F + C$, etiam $\frac{A}{B} - C = F$: ergo $A - C = B$ in F: sed Z metitur B, adeoque per 3. axioma Z metitur B *in* F: ergo Z metitur $A - C$: sed etiam Z metitur A: ergo per axioma 2. etiam Z metitur C. Rursus, $\frac{B}{C} = G + D$: ergò $\frac{B}{C} - D = G$: ergò $B - D = C$ *in* G: sed iam ostensum est Z metiri C, adeoque per 3. axioma Z metitur C *in* G: ergò Z metitur $B - D$: atqui etiam Z metitur B: ergo per 2. axioma Z metitur D. Rursus, $\frac{C}{D} = K + E$: ergò $\frac{C}{D} - E = K$: ergò $C - E = D$ *in* K: sed ostensum est Z metiri D, adeoque per 3. axioma Z metitur D *in* K: ergò Z metitur $C - E$: atqui etiam Z metitur C: ergò per 2. axioma Z metitur E. Rursus $\frac{D}{E} = L$: ergò per 4. axioma E metitur D, adeoque per 3. axioma E metitur D *in* K, hoc est $C - E$: sed etiam E metitur seipsum: ergò per 2. axioma E metitur C, adeoque per

3. axio-

3. axioma E metitur C *in* G; hoc est B — D: sed etiam ostensum est E metiri D: ergò per 2. axioma E metitur B, adeoque per 3. axioma E metitur B *in* F; hoc est A — C: sed ostensum est E metiri C: ergò per 2. axioma E metitur A: igitur constat E metiri A & B, adeoque esse communem mensuram A & B: sed quoniam ostensum est Z (qui per constr. est maxima communis mensura A & B) metiri E, patet E non esse minorem maxima communi mensura A&B: ergò E est maxima communis mensura numerorum A & B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet, quod si numerus Z sit maxima communis mensura numerorum A & B, quilibet numerus X, qui metitur A & B, etiam metitur Z. Etenim cum per hypot. X metiatur A & B, ordine præscripto in propositione continuando diuisiones, per corollar. propos. 1. tandem deuenietur ad diuisionem, in qua X est diuisor, & nullum remanet residuum: sed etiam per hypot. deuenitur ad diuisionem, in qua diuisor est Z, & nullum remanet diuisionis residuum: ergò ordine prædicto continuando diuisiones; peruenitur, tum ad diuisionem, in qua Z est diuisor, & nullum remanet residuum; tum etiam ad diuisionem; in qua X est diuisor, nullumque remanet residuum: sed ordine præscripto continuando diuisiones, prius occurrit diuisio, in qua Z est diuisor, cum sit prima, in qua nullum remaneat residuum: ergò ordine præscripto continuando diuisiones, ex diuisione, in qua Z est diuisor, peruenitur ad diuisionem, in qua X est

diui-

diuisor, nisi fortè $Z = X$: ergo per 2. propos. Z metitur X; quod idem patet si $Z = X$.

Problema II. Propositio III.

T*Ribus numeris datis non primis inter se maximam eorum communem mensuram inuenire.*

Dati sint tres numeri vulgares integri A, B, C.

Oporteat eorum maximam communem mensuram inuenire.

Solutio, Per props. 2. inueniatur X maxima mensura communis numerorum A, & B: deindè iterùm per eamdem propositionem inueniatur Z maxima communis mensura numerorum X, & C.

Dico, Z esse maximam communem mensuram numerorum A, B, C.

Nota, quod si X metiatur C, tùnc $Z = X$; si verò X non metiatur C, tùnc Z non $=$ X. Vtroque tamen casu X erit maxima communis mensura numerorum A, B, C,

Demonstratio. Per corollar. props. 2. Omnis numerus, qui metitur A, & B, etiam metitur X maximam mensuram numerorum A, & B: ergo maximus numerus, qui metitur X est maxima communis mensura A, & B: ergo etiam maximus numerus, qui metitur X, & C, est maxima communis mensura numerorum A, B, C: sed per hypot. numerus Z est maximus numerus, qui metitur X, & C: ergo numerus Z est maxima communis mensura numerorum A, B, C. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema II. Propoſitio IV.

O*Mnis numerus omnis numeri, minor maioris; vel pars eſt, vel partes.*

Sint duo numeri vulgares integri. A, & B, quorum minor ſit A; maior verò ſit B: Vel vniuerſaliter.

Qualeſcunque eiuſdem generis quantitates ſint A, & B; ità tamen, vt A ſit minor quam B.

Dico, A eſſe partem aliquotam, vel aliquantam ipſius B.

Propoſitio patet ex terminis, cum quælibet minor quantitas aliquoties ſumpta præcisè adæquet, vel non adæquet quamlibet maiorem eiuſdem generis quantitatem.

Theorema III. & IV. Propoſitio V. & VI.

S*I numerus numeri pars fuerit, vel partes, & alter alterius eadem pars, vel partes: etiam vterque vtriuſque eadem pars, vel partes erit, quæ vnus vnius.*

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D, atque A *ad* B = C *ad* D: ſiuè A metiatur B, & inſuper C, metiatur D, ſiuè non. Vel vniuerſaliter.

Qualeſcunq; eiuſdem generis ſint quantitates A, B, C, D: ità tamen, vt A *ad* B = C *ad* D.

S Dico

Dico, A † C *ad* B † D = A *ad* B.

Demonstratio. Per hypot. A *ad* B = C *ad* D: ergo per asser. 2. theor. 5. partis 4. Ideæ Logist. A *ad* C = B *ad* D ergo per asser. 3. ibidem A † C *ad* C = B † D *ad* D: ergo iterum per asser. 2. A † C *ad* B † D = C *ad* D: sed A *ad* B = C *ad* D: ergo A † C *ad* B † D = A *ad* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema V. & VI. Propositio VII. & VIII.

SI numerus numeri pars fuerit, vel partes, quæ ablatus ablati, & reliquus reliqui eadem pars, vel partes erit, quæ totus totius.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D; ità vt A *ad* B = C *ad* D; siue A metiatur B, & C metiatur D, siuè non; dummodò A sit maior quam C, & B sit maior quam D. Vel vniuersaliter.

Qualescunq; eiusdem generis sint quantitates A, B, C, D: ità tamen, vt A *ad* B = C *ad* D.

Dico, A — C *ad* B — D = A *ad* B.

Demonstratio. Per hypot. A *ad* B = C *ad* D: ergò per asser. 2. theor. 5. partis 4. Ideæ Logist. A *ad* C = B *ad* D: ergo per asser. 4. & 2. ibidem A — C *ad* B — D = C *ad* D: sed A *ad* B = C *ad* D: ergo A — C *ad* B — D = A *ad* B: Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema VII. & VIII. Propositio IX. & X.

SI numerus numeri pars fuerit, vel partes, & alter alterius eadem pars, vel partes: etiam permutando, quæ pars est, vel partes primus tertij, eadem pars, vel partes erit secundus quarti.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D, atque A *ad* B = C *ad* D; siuè A metiatur B, & C metiatur D, siuè non. Vel vniuersaliter.

Qualescunq; eiusdem generis sint quantitates A,B,C,D: ità tamen, vt A *ad* B = C *ad* D.

Dico, permutando A *ad* C = B *ad* D.

Demonstratio patet ex theoremate 5. partis 4. Ideæ Logisticæ.

Theorema IX. Propositio XI.

SI fuerit, vt totus ad totum, ità ablatus ad ablatum: & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D; ità vt A *ad* B = C *ad* D, atque A sit maior quam C; item B sit maior quam D. Vel vniuersaliter.

Qualescunq; eiusdem generis quantitates sint A,B,C,D: ità tamen, vt A *ad* B = C *ad* D.

Dico, A — C *ad* B — D = A *ad* B.

Demonstratio patet ex propositionibus 7. & 8. vniuersaliter propositis.

Theorema X. Propositio XII.

SI quotcunque numeri proportionales fuerint; vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ità erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotuis numeri vulgares integri A, B, C, D, E, F; atque A *ad* B = C *ad* D = E *ad* F. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis quantitates sint A, B, C, D, E, F; ità tamen vt A *ad* B = C *ad* D = E *ad* F.

Dico, A † C † E *ad* B † D † F = A *ad* B.

Demonstratio. Per hypothesim A *ad* B = C *ad* D: ergo per theorema quintum partis quartæ Ideæ Logisticæ, permutando atque componendo patet, A † C *ad* B † D = A *ad* B: sed per hypothesim A *ad* B = E *ad* F: ergo A † C *ad* B † D = E *ad* F: ergo iterum per theor. quintum partis quartæ Ideæ Logisticæ, permutando atque compondo manifestum est, A † C † E *ad* B † D † F = E *ad* F: sed per hypothesim, E *ad* F = A *ad* B: ergo A † C † E *ad* B † D † F = A *ad* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema XI. Propositio XIII.

SI quatuor numeri proportionales fuerint: & permutando proportionales erunt.

Sint quatuor numeri vulgares integri A, B, C, D, atque A *ad* B = C *ad* D.

Dico, permutando A *ad* C = B *ad* D.

Demonstratio patet ex theoremate 5. partis 4. Ideæ Logisticæ.

Theorema XII. Propositio XIV.

SI fuerint quotcunque numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione: etiam ex æqualitate in eadem proportione erunt.

Sint quotuis numeri vulgares integri A, B, C, D, E, F; ità vt A *ad* B = D *ad* E, & insuper B *ad* C = E *ad* F. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis quantitates sint A, B, C, D, E, F: ità tamen vt A *ad* B = D *ad* E, atque insuper B *ad* C = E *ad* F.

Dico, ex æqualitate; vel ex æquo A *ad* C = D *ad* F.

Demonstratio patet ex theor. 6. partis 4. Ideæ Logisticæ.

Theo-

Theorema XIII. Propositio XV.

SI vnitas numerum aliquem metiatur; alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem: & permutando vnitas tertium numerum æqualiter metietur, atque secundus quartum.

Sint tres numeri vulgares integri A, B, C; atque 1 *ad* A = B *ad* C.

Dico permutando 1 *ad* B = A *ad* C.

Demonstratio patet ex theoremate 5. partis 4. Ideæ Logisticæ.

Theorema XIV. Propositio XVI.

SI duo numeri se multiplicantes fecerint aliquos; facti ab ipsis inter se æquales erunt.

Sint duo numeri vulgares integri A & B, atque A *in* B = C. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A & B, atque A *in* B = C.

Dico, B *in* A = C.

Demonstratio. Per hypot. A *in* B = C: sed per axioma 1. partis 4. Ideæ Logist. A *in* B = B *in* A: ergo B *in* A = C. Quod erat demonstrandum.

Theorema XV. Propositio XVII.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; facti ex ipsis eamdem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Sint numeri vulgares integri A, B, C; atque A *in* C = D: item B *in* C = E. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A, B, C; atque A *in* C = D: item B *in* C = E.

Dico, D *ad* E = A *ad* B.

Demonstratio. Per corollar. theor. 4. partis 4. Ideæ Logist. A *in* C *ad* B *in* C = A *ad* B: sed per hypot. A *in* C = D: item B *in* C = E: ergo D *ad* E = A *ad* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVI. Propositio XVIII.

SI duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eamdem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Sint numeri vulgares integri A, B, C. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A, B, C.

Dico, C *in* A *ad* C *in* B = A *ad* B.

Demonstratio patet ex præcedenti propositione.

Theo-

Theorema XVII. Propositio XIX.

SI quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto fit numerus æqualis est ei, qui fit ex secundo, & tertio. Et si numerus, qui fit ex primo, & quarto æqualis est ei, qui fit ex secundo, & tertio; quatuor numeri proportionales erunt.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A, B, C, D.

Dico, A *in* D = B *in* C, si A *ad* B = C *ad* D. Et viciſſim A *ad* B = C *ad* D, si A *in* D = B *in* C.

Hæc propositio æquiualet axiomati 3. partis 4. Ideæ Logisticæ.

Theorema XVIII. Propositio XX.

SI tres numeri proportionales fuerint: qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui fit à medio: tres numeri proportionales erunt.

Sint numeri vulgares integri A, B, C. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A, B, C.

Dico, A *in* C = B *in* B, si A *ad* B = B *ad* C. Et viciſſim A *ad* B = B *ad* C, si A *in* C = B *in* B.

Hæc assertio conuenit cum axiomate 3. partis 4, Ideæ.

Theo-

Theorema XIX. Propoſitio XXI.

NVmeri omnium ſibi proportionalium minimi numeros ſibi proportionales æque metiuntur.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D: atque A *ad* B = C *ad* D: & inſuper proportio A *ad* B conſtet minimis terminis.

Dico, A metiri C: & inſuper B metiri D.

Quandoquidem iuxta definitiones Logiſticæ, quibus vtimur, etiam vnitas eſt verè, & propriè numerus: propoſitio, vt à me proponitur paulò vniuerſalior eſt; quam Euclidea, atque duplicem admittit caſum: primus caſus eſt, quando ex numeris A, & B, aliquis eſt vnitas; ſecundus caſus eſt, quando ex numeris A, & B nullus eſt vnitas. *De ſecundo tantum caſu agit propoſitio Euclidea, quia iuxta eius definitiones vnitas non eſt numerus. Vtrum ſecundus iſte caſus in Euclidea propoſitione propoſitus apud eius interpretes legitime demonſtratus inueniatur ſuo loco conſiderabimus.*

Demonſtratio in primo caſu. Per Hypotheſim A *ad* B = C *ad* D: ergo permutando A *ad* C = B *ad* D: ſed quoniam per hypotheſim A, vel B eſt vnitas, & inſuper numeri B, & D ſinguli ſunt integri vulgares: patet A metiri C, vel B metiri D: ergo A metitur B, & etiam C metitur D: Vt aſſeritur in propoſitione.

Demonſtratio in ſecundo caſu. Per hypot. A *ad* B = C *ad* D: ſed per theor. 3. partis 4. Ideæ Logiſt. A *ad* B = C *ad* $\frac{B \text{ in } C}{A}$: ergo C *ad* D = C *ad* $\frac{B \text{ in } C}{A}$: ergo $\frac{B \text{ in } C}{A}$ = D: ſed per

hypot. D = vulgari integro : ergo $\frac{B \text{ in } C}{A}$ = vulgari integro : ergo A metitur B *in* C: atqui pariter per hyp. proportio A *ad* B constat minimis integris terminis diuersis ab vnitate, adeoq; per prop. *3*. de commensurabilibus, & incommensurabilibus quantitatibus, A non metitur B : ergo per secundam partem propos. *6*. ibid. A metitur C: Sed quoniam A *ad* B = C *ad* D, permutando A *ad* C = B *ad* D: ergo etiam B metitur D; constat igitur in vtroque casu proposito A metiri C, et insuper B metiri D. Quod erat demonstrandum.

Theorema XX. Propositio XXII.

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione, sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æqualitate in eadem proportione erunt.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, D, E, F : ita vt A *ad* B = E *ad* F : & insuper B *ad* C = D *ad* E. Vel vniuersaliter.

Qualescunque eiusdem generis sint quantitates A, B, C, D, E, F; ità tamen vt A *ad* B = E *ad* F : & insuper B *ad* C = D *ad* E.

Dico, ex æqualitate, vel ex æquo, A *ad* C = E *ad* F.

Demonstratio. Per hypot. A *ad* B = E *ad* F: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ Logist. B *in* E = A *in* F : sed etiam per hypot. B *ad* C = D *ad* E, adeoque B *in* E = C *in* D: ergo A *in* F = C *in* D: ergo per idem 3 axioma, A *ad* C = D *ad* F. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theor. XXI. & XXII. Prop. XXIII. & XXIV.

P*Rimi inter ſe numeri ſunt omnium ſibi proportionalium minimi. Et numeri omnium ſibi proportionalium minimi ſunt inter ſe primi.*

Sint numeri vulgares integri A & B.

Dico primò, proportionem A *ad* B eſſe expreſſam minimis terminis, ſi A & B non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate.

Dico ſecundò, A & B non habere communem menſuram diuerſam ab vnitate, ſi proportio A *ad* B eſt expreſſa minimis terminis.

Demonſtratio primæ partis patet ex aſſertione 1. propoſ. 3 de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus quantitatibus.

Demonſtratur ſecunda pars. Per aſſer. 2. propoſ. 3. de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus quantitatibus, proportio A *ad* B eſt expreſſa minimis integris terminis, ſi A & B non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate: ſed per hypot. proportio A *ad* B eſt expreſſa minimis terminis integris: ergo A & B non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate. Quod erat ſecundum.

Theorema XXIII. Propoſitio XXV.

N*Vmerus, qui ex duobus inter ſe primis metitur vnum, ad reliquum primus eſt.*

Sint numeri vulgares integri A, B, C; quorum A & B non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate, tamen C metiatur A.

Dico, B & C non habere communem mensuram diuersam ab vnitate.

Constructio. Littera X significet quamcunque mensuram communem numerorum B & C.

Demonstratio. Per constr. X metitur C: sed per hypot. C metitur A: ergo per axioma 1. etiam X metitur A: ergo X est communis mensura numerorum A & B: sed per hypot. A & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo X = 1: sed per constr. X est quælibet mensura numerorum B & C: ergo B & C non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXIV. Propositio XXVI.

SI duo numeri ad quempiam tertium primi fuerint, etiam simul multiplicati ad eumdem tertium primi erunt.

Sint numeri vulgares integri A, B, C, præterea neq; A & C, neq; B, & C, habeant cõmunem mensurã diuersam ab vnitate.

Dico, A *in* B & C non habere communem mensuram diuersam ab vnitate.

Demonstratio patet ex assertione 2. propos. 5. de commensurabilibus, & incommensurabilibus quantitatibus.

Theorema XXV. Propositio XXVII.

SI duo numeri fuerint inter se primi: etiam quadratum vnius ad reliquum primus erit.

Nume-

Numeri vulgares integri A, & B non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Dico A *in* A, & B non habere commuhem mensuram diuersam ab vnitate.

Demonstratio. Per hypot. A, & B; item A, & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per præcedentem A *in* A, & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXVI. Propositio XXVIII.

SI duo numeri ad duos alios numeros, vterque ad vtrumque primi fuerint: etiam ex ipsis geniti inter se primi erunt.

Numeri vulgares integri A, B, C, D sint tales, vt A & C, item A & D; ac præterea B & C, item B & D, non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Dico, A *in* B, & C *in* D non habere mensuram communem diuersam ab vnitate.

Demonstratio. Per hypot. C & A: item D & A non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per propos. 26. etiam C *in* D & A non habent talem mensuram. Similiter per hypot. C & B; item D & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per eamdem propos. 26. C *in* D & B non habent talem mensuram: ergo C *in* D & A: item C *in* D & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo iterum per propos. 26. A *in* B, & C *in* D non habent talem mensuram. Quod erat demonstrandum:

Theo-

Theorema XXVII. Propositio XXIX.

SI duo numeri inter se primi fuerint: etiam illorum quadrati, cubi, & sic deinceps, primi erunt.

Duo numeri vulgares integri A & B non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Dico, etiam A *n* & B *n* non habere talem mensuram.

Nota litteram n repræsentare quemuis numerum vulgarem integrum, qui potest esse denominator dignitatum A & B.

Demonstratio. Per hypot. A & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per præcedentem B *in* B, & A *in* A non habent talem mensuram, & prætereа per propos. 26. A & B *in* B: item B & A *in* A, hoc est A & B 2: item B & A 2 non habent talem mensuram: ergo A 2 cum B 2, vel B: item B 2 cum A 2, vel A non habent talem mensuram: ergo per præcedentem B *in* B 2, & A *in* A 2, hoc est B 3 & A 3 non habent talem mensuram, et prætereа per propos. 26. A et B 3: item B et A 3 non habent talem mensuram: ergo A 3 cum B 3, vel B: item B 3 cum A 3, vel A non habent talem communem mensuram: ergo per præcedentem B *in* B 3, et A *in* A 3; hoc est B 4 et A 4 non habent talem mensuram: atque ità de reliquis in infinitum, adeoque B *n*, et A *n* non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XXVIII. Propositio XXX.

SI duo numeri inter se primi fuerint: etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Quod si vterque simul ad vnum aliquem ipsorum sit primus, & numeri à principio positi primi erunt.

Numeri A & B sint vulgares integri.

Dico primo, A † B & A, item A † B & B, non habere mensuram diuersam ab vnitate, si A & B non habeant talem mensuram.

Dico secundo, A & B non habere mensuram diuersam ab vnitate, si A † B & A, vel A † B & B non habeant talem mensuram.

Constructio. Littera X significet quamlibet communem mensuram numerorum A † B et A.

Demonstratur prima pars. Per constr. X metitur A: item X metitur A † B: ergo X metitur A et B: sed per hypot. A et B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo X = 1: sed per constr. X est quæcunque mensura communis A † B et A: ergo A † B et A non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Idem similiter patet de A † B et B, si X sit communis mensura numerorum A † B et B: ergo A † B et A, item A † B & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Eadem posita constructione aliter idem demonstratur. Per defin. 7. X est pars aliquota numeri A † B, ergo datur integer E, ità vt X *in* E = A † B: item X est pars aliquota numeri

meri A : ergo datur integer F, ita vt X *in* F = A; itaque manifeſtum eſt, integrum E eſſe maiorem integro F : ergo E — F = alicui integro K : ſed quoniam X *in* E = A † B, et etiam X *in* F = A, patet X *in* E *et* — X *in* F = A † B — A ≏ B : ergo X *in* E *et* — X *in* F = B : ſed X *in* E *et* — X *in* F = X *in* E — F ≏ X *in* K, quoniam, vt diximus, E — F = K : ergo X *in* K = B : ergo K = $\frac{B}{X}$: ſed oſtenſum eſt K eſſe integrum : ergo $\frac{B}{X}$ = integro : ergo X metitur B : ſed per conſtr. X metitur A : ergo X metitur A et B : ſed per hypot. A et B non habênt communem menſuram diuerſam ab vnitate : ergo X = 1 : ergo ſequitur, vt prius, A † B et A, item A † B & B non habere communem menſuram diuerſam ab vnitate. Quod erat primum.

Conſtructio pro ſecunda parte; X repræſentet quamlibet menſuram communem numerorum A & B.

Demonſtratur ſecunda pars. Per conſtructionem X metitur A & B: ergo per 2. axioma X metitur A † B: ergo numerorum A † B & A, item A † B & B communis menſura eſt X: ſed per hypot. vel A † B & A, vel A † B & B, non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate: ergo X eſt vnitas : ſed per conſtructionem X eſt quælibet menſura communis numerorum A & B : ergo numeri A et B non habent menſuram communem diuerſam ab vnitate. Quod erat ſecundum.

Theorema XXIX. Propoſitio XXXI.

O*Mnis primus numerus ad omnem, quem non metitur primus eſt.*

Nume-

Numerus vulgaris integer A non habeat menſuram diuerſam ab vnitate, ac præterea non metiatur integrum vulgarem B.

Dico, numeros A et B non habere communem menſuram diuerſam ab vnitate.

Demonſtratio. Per hypot. A non habet menſuram diuerſam ab vnitate, niſi ipſum A: ergo A et B non habent communem menſuram diuerſam ab vnitate, niſi ipſum A: ſed per hypot. A non metitur B: ergo A et B nullam habent communem menſuram diuerſam ab vnitate. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XXX. Propoſitio XXXII.

SI planum numerum aliquis primus metitur; is etiam è plani lateribus alterutrum metitur.

Sint numeri vulgares integri A et B, atque aliquis vulgaris integer C non habens menſuram diuerſam ab vnitate metiatur A *in* B.

Dico, C metiri A, vel B.

Conſtructio $\frac{A \textit{ in } B}{C} = D$.

Demonſtratio. Per hypot. C metitur A *in* B: ergo $\frac{A \textit{ in } B}{C} =$ alicui integro: ſed per conſtr. $\frac{A \textit{ in } B}{C} = D$: ergo D eſt vulgaris integer, adeoque ſinguli numeri A, B, C, D ſunt vulgares integri: præterea quoniam $\frac{A \textit{ in } B}{C} = D$, per probl. 4. cap. 5. lib. 1. Logiſt. A *in* B $=$ C *in* D: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ Logiſt. A *ad* C $=$ D *ad* B: ſed per hypot. C nullam habet menſuram diuerſam ab vnitate niſi ipſum C: ergo vel C metitur A, vel C et A nullam habent menſuram communem diuerſam ab vnitate. Iam vero ſi C metitur A,

patet, quod est probandum, nimirum C metiri A, vel B: Si vero C & A nullam habent communem mensuram diuersam ab vnitate; igitur per propos. 23. proportio A *ad* C est expressa minimis integris terminis: sed etiam (vt demonstratum est) A *ad* C = D *ad* B: ergo per propos. 21. A metitur D, et insuper C metitur B: ergo vtroque casu C metitur A, vel B. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXI. Propositio XXXIII.

Omnem compositum numerum aliquis primus metitur.

Sit numerus vulgaris integer A, qui habeat mensuram diuersam ab vnitate, atque talis mensura minima sit B.

Dico, B nullam habere mensuram ab vnitate diuersam.

Demonstratio. Per hypot. B metitur A: ergo per axioma 1. quilibet numerus, qui metitur B, metitur A: ergo si daretur aliquis numerus diuersus ab vnitate, qui metiretur B, etiam ille idem numerus metiretur A: sed per hypot. nullus datur numerus ab vnitate diuersus minor B, qui metiatur A: ergo nullus datur numerus diuersus ab vnitate, qui metiatur B: ergo B nullam habet mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXII. Propositio XXXIV:

Omnis numerus aut primus est, aut ab aliquo primo mensuratur.

Sit qualiscunque numerus vulgaris integer A.

Dico, A non habere mensuram diuersam ab vnitate; vel

dari

dari alium numerum vulgarem integrum B non habentem mensuram diuersam ab vnitate; ita vt B metiatur A.

Demonstratio patet ex præcedenti; etenim si A habet mensuram diuersam ab vnitate, atque omnium minima sit B; per præcedentem B non habet mensuram diuersam ab vnitate.

Problema III. Propositio XXXV.

NVmeris datis quotcunque, inuenire minimos ipsis proportionales.

Dati sint quotcunque numeri vulgares integri A, B, C.

Oporteat inuenire alios totidem numeros D, E, F datis proportionales, atque integros & minimos omnium eamdem proportionem habentium.

Solutio. Per propos. 3. numerorum A, B, C inueniatur maxima communis mensura Z: atque $\frac{A}{Z} = D$: item $\frac{B}{Z} = E$: denique $\frac{C}{Z} = F$.

Dico, inuentos numeros D, E, F datis A, B, C esse proportionales, atque minimos omnium eamdem proportionem habentium.

Constructio. Minimi vulgares integri habentes eamdem proportionem, quam habent A, B, C sint L, M, N.

Demonstratio. Per constr. L *ad* M = A *ad* B: item L *ad* M est proportio minimis integris terminis expressa: ergo per propos. 21. L metitur A, et M metitur B: ergo $\frac{A}{L} =$ alicui integro X: sed quoniam L *ad* M = A *ad* B, permutando L *ad* A = M *ad* B: ergo $\frac{A}{L} = \frac{B}{M}$: ergo $\frac{B}{M} = X$. Similiter patet $\frac{B}{M} = \frac{C}{N}$, adeoq; $\frac{C}{N} = X$: ergo $\frac{A}{L} = X$: itẽ $\frac{B}{M} = X$: item $\frac{C}{N} = X$: ergo $\frac{A}{X} = L$: item $\frac{B}{X} = M$: item $\frac{C}{X} = N$: atqui singuli

L, M, N, et etiam X sunt integri : ergo X est communis mensura numerorum A, B, C; sed etiam L, M, N sunt minimi habentes eamdem proportionem cum A, B, C: ergo X est maxima communis mensura numerorum A, B, C : sed etiam per hypot. Z est maxima communis mensura numerorum A, B, C: ergo X = Z, ergo $\frac{A}{X} = \frac{A}{Z}$: sed $\frac{A}{X}$ = L, et per hypot. $\frac{A}{Z}$ = D: ergo L = D. Similiter patet M = E: item N = F: atqui per constr. L, M, N sunt minimi habentes eamdem proportionem, quam A, B, C: ergo etiam D, E, F sunt minimi habentes eamdem proportionem, quam A, B, C. Quod erat demonstrandum.

Problema IV. Propositio XXXVI.

D*Vobus numeris datis reperire minimum, quem metiuntur.*

Dati sint duo numeri vulgares integri A et B.

Oporteat inuenire vulgarem integrum X minimum omnium, qui mensurantur à singulis A et B.

Solutio. Primo per præcedentem propos. inueniantur vulgares integri C et D; ita vt C *ad* D = A *ad* B, et proportio C *ad* D sit expressa minimis integris terminis: deinde inueniatur vulgaris integer X; ita vt A *in* D = X.

Dico X esse minimum omnium, qui mensurantur à singulis A et B.

Constructio. Littera Z repræsentet quæmuis numerum vulgarem integrum diuersum ab A *in* D, quemque metiantur singuli A et B: præterea $\frac{Z}{A}$ = K: item $\frac{Z}{B}$ = L.

Demonstratio. Per hypot. C *ad* D = A *ad* B: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ Logist. A *in* D = B *in* C : sed per axioma 3. A metitur A *in* D: item B metitur B *in* C, hoc est

A *in* D,

A *in* D ≏ X: ergo ſinguli A et B metiuntur X. Præterea per conſtr. $\frac{Z}{A}$ = K: item $\frac{Z}{B}$ = L: ergo per probl. 4. cap. 5. lib. 1. Logiſt. Z = A *in* K: item Z = B *in* L, adeoque A *in* K = B *in* L: ergo A *ad* B = L *ad* K: ſed per hypot. A *ad* B = C *ad* D: ergo C *ad* D = L *ad* K: atqui etiam per hypot. proportio C *ad* D eſt expreſſa minimis integris terminis; ergo per propoſ. 21. C metitur L, & D metitur K: ergo D eſt minor K: ergo A *in* D eſt minor A *in* K; ſed A *in* D = X, & A *in* K = Z: ergo X eſt minor Z: ſed per conſtr. Z eſt quilibet numerus diuerſus ab X, quem metiuntur ſinguli A & B: ergo non datur numerus minor numero X, quem metiantur ſinguli A & B: ſed etiam prius oſtenſum eſt, quod ſinguli numeri A & B metiantur X: ergo X eſt minimus omnium, quem metiuntur ſinguli A & B. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XXXIII. Propoſitio XXXVII.

SI duo numeri metiantur aliquem alium numerum: etiam minimus, quem illi metiuntur, eumdem metietur.

Sint duo numeri vulgares integri A & B, qui ſinguli metiantur vulgarem integrum C; atque vulgaris integer E ſit minimus omnium, quos metiuntur ſinguli numeri A, & B: Dico, numerum E metiri numerum C.

Conſtructio X *ad* Z = A *ad* B, & proportio X *ad* Z ſit expreſſa minimis integris terminis: præterea $\frac{C}{A}$ = K: item $\frac{C}{B}$ = L.

Demonſtratio. Per conſtr. proportio X *ad* Z eſt expreſſa minimis integris; & inſuper X *ad* Z = A *ad* B: ergo per præcedentem Z *in* A eſt minimus omnium numerorum,

quo,

quos metiuntur A, & B: sed quoniam X *ad* Z = A *ad* B, etiam per axioma 3. partis 4. Ideæ Logist. Z *in* A = X *in* B, & prætereà per hypot. E est minimus omnium, quos metiuntur A, & B: ergo E = Z *in* A = X *in* B: sed etiam per constr. & probl. 4. cap. 5. lib. 2. Logist. A *in* K = C. item B *in* L = C, adeoque A *in* K = B *in* L: ergo A *ad* B = L *ad* K: sed A *ad* B = X *ad* Z: ergo X *ad* Z = L *ad* K. atqui per hypot. proportio X *ad* Z est expressa minimis terminis: ergo per propos. 21. Z metitur K: ergo Z *in* A metitur K *in* A: sed Z *in* A = E: item K *in* A = C: ergo E metitur C. Quod erat demonstrandum.

Problema V. Propositio XXXVIII.

D*Atis tribus numeris inuenire minimum, quem metiuntur.* Dati sint tres numeri vulgares integri A, B, C.

Oporteat inuenire vulgarem integrum numerum, qui sit minimus omnium numerorum, qui mensurantur à singulis A, B, C.

Solutio. Per propos. 36. inueniatur numerus vulgaris integer P; qui sit minimus omnium, quos metiuntur A & B; quod si etiam numerus C metiatur hunc numerum P: erit P numerus quæsitus: sin autèm C non metiatur ipsum P, rursus per præpos. 36. inueniatur Q, qui sit minimus omnium, quos metiuntur C & P: erit in hoc secundo casu Q numerus quæsitus.

Demonstratur primus casus. Per hypot. P est minimus omnium, quos metiuntur A et B: ergo nullus numerus minor P mensuratur ab A, et B, et tamèn P mensuratur ab

A & B

A et B : ergo nullus numerus minor P menſuratur à numeris A, B, C, et tamen P menſuratur à numeris A, B, C: ergo numerus P eſt minimus omnium, quos metiuntur ABC. Quod erat primum:

Conſtructio pro ſecundo caſu. Sit quiuis vulgaris integer X diuerſus à numero Q, qui menſuretur à numeris A B C.

Demonſtratur ſecundus caſus. Per hypot. Q menſuratur à numeris P et C : item P menſuratur à numeris A et B: ergo per axioma 1. Q menſuratur à ſingulis numeris A, B, C. Quoniam autem P eſt minimus omnium, quos metiuntur A et B, et etiam per conſtr. X menſuratur ab A et B; per præcedentem P metitur X: ſed per conſtr. etiam C metitur X: ergo X menſuratur à numeris P et C : atqui per hypot. Q eſt minimus omnium quos metiuntur P et C : ergo per præcedentem Q metitur X: ergo X eſt maior quam Q: ſed per conſtr. numerus X eſt quilibet diuerſus à numero Q, qui menſuratur à ſingulis numeris A, B, C, ergo quilibet numerus diuerſus a numero Q qui menſuratur a ſingulis numeris A, B, C eſt maior numero Q : ſed prius oſtenſum eſt, numerum Q menſurari à ſingulis numeris A, B, C : ergo numerus Q eſt minimus omnium, qui menſurantur à ſingulis nomeris A, B, C. Quod erat ſecundum.

Theorema XXXIV. Propoſitio XXXIX.

SI numerum numerus aliquis metiatur: menſus partem habebit à metiente denominatam.

Sint numeri vulgares integri A, B, C; atque A = B *in* C. Dico, $\frac{A}{B}$ = C.

De-

Demonstratio patet ex problemate 4. cap. 5. lib. 1. logist.

Theorema XXXV. Propositio XL.

Si numerus partem quamcunque habuerit, eum metietur numerus à parte denominatus.

Sint numeri vulgares integri A, B, C: atque $\frac{A}{B} = C$.

Dico, singulos numeros B et C metiri numerum A.

Demonstratio. Per hypot. $\frac{A}{B} = C$: ergo per probl. 4. cap. 5. lib. 1. Logist. A = B *in* C: sed etiam per hypot. singuli numeri B et C sunt vulgares integri, adeoque per axioma 4. singuli C et B metiuntur B *in* C: ergo singuli C et B metiuntur A. Quod erat demonstrandum.

Problema VI. Propositio XLI.

Numerum inuenire, qui minimus existens datas partes habeat.

Dati sint tres numeri vulgares integri A, B, C.

Oporteat inuenire minimum vulgarem integrum numerum, qui diuidi possit per singulos numeros A, B, C; ità vt productum semper sit vulgaris integer numerus.

Solutio. Per propos. 38. inueniatur minimus vulgaris integer X, qui mensuretur à datis numeris A, B, C: erit X numerus quæsitus.

Demonstratio. Per hypot. Numerus X est minimus omnium quos metiuntur numeri A, B, C: ergo numerus X est minimus omnium, qui diuidi potest per singulos numeros A, B, C, ita vt productum semper sit vulgaris integer numerus. Quod erat demonstrandum.

AE G I-

ÆGIDII FRANCISCI
DE GOTTIGNIES
SOCIETATIS IESV

PROBLEMA STATICVM
Hactenus insolutum, atque totius Stereo-Staticæ præcipuum fundamentum:

Quare vires crescant per Vectem:

S I V E

Quare in Statera, minoris grauitatis pondus ex vno brachio suspensum, sustineat maioris grauitatis pondus suspensum ex oppofito brachio, præcisè per hoc, quòd minoris grauitatis pondus, iugum trahat per lineam, quæ magis distet à Stateræ fulcro.

AD ILLVSTRISSIMVM, ET EXCELLENTISSIMVM PRINCIPEM

D. LIVIVM
ODESCALCVM
CÆRE DVCEM
SANCTISSIMI DOMINI NOSTRI
INNOCENTII XI.
EX FRATRE NEPOTEM.



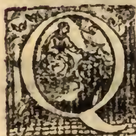
ILL.^{MO} ET EXCELL.^{MO} PRINCIPI

D. LIVIO ODESCALCO

AEGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES

Societatis IESV

FELICITATEM.



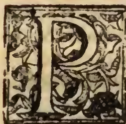
QVAM altè, quantiſque inuolutum tenebris, ad hanc diem, Staticæ hoc de Vecte problema latuerit, vel inde fit palam, quòd eius ſolutio perquiſita ſeriò, ac intentè aciem effugere potuerit, & Ariſtotelis non Peripateticorum modò, ſed Sapientum omnium confeſſione, ingeniorum Phænicis; eiuſque item Lyncei, quem recentium aliquorum deſciſcens ab Ariſtotele Schola tanti æſtimat, & commendat. Magnum porrò ab hac ipſa difficultate incrementum capit huius problematis cum profunditate præſtantia. Quamobrem ſuſpicari meritò aliqui poſſint

hanc ipsam, quæ à me profertur, deferturque Tibi, Excellentissime Princeps, eius solutionem non omni vsquequaque carituram esse defectu. Atqui hoc egó maximè nomine illam Tibi cognitam prius, ac deinde volui consecratam: vt nimirum, si aliquis in eam error à me inobseruatus clanculum irrepserit, tuos certè obtutus effugere ille non posset; quorum peracutam, peraccuratamque vim & in Philosophorum placitis, & in Mathematicorum inuentis sæpè mihi questuosa cum voluptate contigit admirari: eadem verò si Tibi probata fuisset, famæ iuxta, veritatisque securus, à nullo deinde metuerem, ne, quæ per tot secula indagata sępius, semperque irreperta, à me nunc denique de Mathematico Vecte mysteria euulgantur, in ijs, quæ redargui meritò possint, cognitor quisquam, censorque iustus inueniat. Hæc mihi de tua dudum cognita, perspectaque Mathematicæ disciplinæ eruditione multiplici confidentia est: quæ tuo coniuncta erga me beneuolentissimo semper animo, quàm me Tibi perreuerenti obsequio deuincit arctissimè, tam etiam stimulis vrget, adigitque perpetuis, vt omnem Tibi à bonorum omnium datore Deo faustitatem, votis, precibusque semper enixis efflagitem. Vale.

PROBLEMATIS STATICI

Pars prima.

Expenditur status quæstionis, atque problema reducitur ad vniuersalitatem quam requirit, vt sit totius Stereo-Staticæ fundamentum.



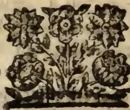
Eripateticorum princeps Aristoteles, in quæstionibus Mechanicis acturus de difficultate, quam hic enodandam suscepimus; *Miraculo* inquit *sunt ea, quæ natura contingunt quorum ignorantur causæ.* Deinde paucis interiectis, ità prosequitur. *Huiusmodi autem sunt ea, in quibus, & minora superant maiora, & quæcunque momentum paruum habentia, magna mouent pondera: & omnia fere illa, quæ Mechanica appellamus problemata. Sunt autem hæc, neque naturalibus omnino quæstionibus eadem, neque seiuncta valde: verùm Mathematicarum contemplationum naturaliumque communia. De numero autem eorum, quæ in hoc genere dubia sunt, illa esse dicuntur, quæ circa Vectem fiunt; absurdum enim esse videtur magnum moueri pondus ab exigua virtute, &c.* hactenus Philosophus. Vt paulò intelligibilior fiat effectus, quem Aristoteles inter naturæ prodigia atque miracula referendum putat, & cuius causam abstrusam ignotamque pronuntiat: consideretur figura prima, in qua E B repræsentet Stateræ, vel Libræ iugum, hoc est virgam Fig. 1.

gam

gam siue lineam rectam rigidam atque inflexibilem; cuius fulcrum, siue hypomochlium, sit punctum A, circa quod liberrimè circumagi possit. Præterea sint duo pondera X, & Z: atque pondus X vocetur potentia, & pendeat ex iugo E B, per rectam B X, pondus Z appelletur impedimentum; atque dependeat ex iugo E B, per rectam C Z; denique iugum E B constitutum in situ ad horizontem parallelo hæreat immotum: atque adeò potentia X, mediante iugo præcisè sustineat impedimentum Z; siuè potentia X cum impedimento Z sit in æquilibrio. Manentibus cæteris omnibus, quæ in proposita hypothesi supponuntur: duplici modo vitiari potest æquilibrium inter potentiam X, & impedimentum Z. Primus modus est, si cæteris manentibus præcisè tantum aliquantulum augeatur distantia puncti C, à puncto A; per hoc enim fiet, vt potentia X, quæ prius præcisè sustentabat impendimentum Z: non possit amplius sustentare illud idem impedimentum Z. Secundus modus est, si cæteris manentibus, præcisè tantum aliquantulum imminuatur distantia puncti C, à puncto A: per hoc enim fiet, vt potentia X, quæ prius præcisè sustentabat impedimentum Z, non tantum sustentet illud idem impedimentum, sed etiam moueat atque attollat. Duplici hoc modo vitiari æquilibrium, constat ex vsitata passim Statera: in qua oculis conspicimus, atque manifesta experientia discimus: quod paruum, exempli Gratia vnius libræ impedimentum Z, ex vna Stateræ parte dependens: sustineat, vel etiam attollat magnam, Exempli Gratia centum, aut plurium librarum potentiam X; atque hunc effectum sequi præcisè ex eo, quod impedimentum Z sufficienter remotum sit ab hypomochlio

A;

A; adeo, vt impedimentum Z, quodammodo ab ipsa maiori distantia ab hypomochlio, mutuetur maiores vires, quibus possit sustinere potentiam, quam non potest sustinere quando habet minorem distantiam ab hypomochlio. Iam verò licet in sensu exposito manifesta experientia certum sit, impedimentum maiores vires acquirere à maiori distantia ab hypomochlio: tamen manifestum non est, quare id fiat: aut quomodo impedimenti maior distantia ab hypomochlio, faciat, siue causet, vt possit sustinere potentiam X: quam imminuta tantummodo hac ipsa distantia ab hypomochlio, sustinere non potest: atque adeo ab ipsa ista distantia quodammodo mutuetur vires. Immo effectus huius causam, maximè abstrusam, atque intellectu difficilem pronuntiat Philosophus; eamdem clare proponere, atque intellectu facilem reddere, scopus est, in hac scriptione mihi propositus. Vt tamen vtilior euadat, atque suis numeris absoluta sit ea doctrina, quam intendo proponere: non ad solam Stateram restringenda est difficultas insinuata, sed sub maiori amplitudine, atque vniuersalitate videtur proponenda: vt proponitur in subsequente hypothesi.



Hypo-

Hypothesis.

Pro consideratione diuersorum modorum, quibus vitiatur æquilibrium inter potentiam, & impedimentum, quando mediante Vecte, siue recta, ac rigida linea in aliquo sui puncto sustentata, contra inuicem agunt.

IN Vecte, siue potius in recta rigida atque inflexibili linea, notata sint tria puncta A, B, C, quod duplici diuerso modo fieri potest; primò, vt punctum A interpositum sit inter puncta B & C, vt fit in quarta, vel sexta figura. Secundò vt punctum A sit vnum ex extremis punctis, atque inter puncta A & C interpositum sit punctum B, vt videre est in quinta & septima figura. Hinc duplicem distinguo casum; primus est, quando, punctum A est interpositum inter puncta C & B, atque adeo ad primum casum spectat quarta & sexta figura. Secundus casus est, quando punctum B est interpositum inter puncta C & A, adeoque ad secundum casum pertinet quinta & septima figura. Vtroq; casu punctum A sit immobile, ità vt circa punctum A liberrimè circumagi possit rigida recta B C; præterea, vtroque casu potentia X (hoc est virtus motiua quam placet appellare potentiam) trahat per rectam C X perpendicularem ad rigidam C B: & impedimentum Z (hoc est virtus motiua quam placet appellare impedimentum) trahat per rectam B Z perpendicularem

rem ad rectam rigidam B C; verùm in primo casu potentia X & impedimentum Z trahant versus eamdem partem: atque in secundo casu potentia X & impedimentum Z trahant versus partes directè oppositas; denique vtroque casu potentia X sit præcisè in æquilibrio cum impedimento Z.

Considerantur diuersi modi quibus in proposita hypothesi potest vitiari æquilibrium inter potentiam X & impedimentum Z, tam in primo quam in secundo casu proposito.

PRimus modus est, si cæteris manentibus, sola linea Z B per quam trahit impedimentum, maneat quidem perpendicularis ad rectam C B, sed tamen distantia puncti A à recta Z B per quam agit impedimentum, augeatur: sic enim fiet vt impedimentum Z, quod prius erat in æquilibrio cum potentia X, desinat esse in æquilibrio, atque potentia X non poterit amplius resistere impedimento Z, cui prius adæquatè resistebat. Fig. 4 & 6. vel 5. & 7.

Secundus modus est, si cæteris manentibus, sola linea Z B per quam trahit impedimentum, maneat quidem perpendicularis ad rectam C B, sed tamen distantia puncti A à recta Z B per quam agit impedimentum, imminuatur: sic enim fiet, vt impedimentum Z quod prius erat in æquilibrio cum potentia X, desinat esse in æquilibrio: atque impedimentum

Z non poterit amplius resistere potentiæ X, cui prius adæquate resistebat.

Tertius modus est, si cæteris manentibus, sola linea Z B per quam trahit impedimentum desinat esse perpendicularis ad rectam C B: sic enim fiet, vt impedimentum Z, quod prius erat in æquilibrio cum potentia X, desinat esse in æquilibrio: atque impedimentum Z non poterit amplius resistere potentiæ X cui prius adæquatè resistebat.

Ex enumeratis tribus modis, quibus diximus vitiari posse æquilibrium inter potentiam X, & impedimentum Z, primus, & secundus consideratur ab Aristotele, sed tantum in primo casu, ad quem propriè spectat Statera quando pro examinandis ponderibus adhibetur, atque supposito, quod lineæ per quas grauitant pondera sint inter se parallelæ: quod in aliquo rigore Physico verum est, sed non in rigore Mathematico, quandoquidem certum sit lineas per quas grauitant pondera simul concurrere in centro grauium; quam ob rem, vt in omni rigore expendamus difficultatem propositam, & etiam sub ea vniuersalitate, quæ illi conuenit, in quantum est primum fundamentum propemodum machinarum omnium, atque totius Sterio-Staticæ: statuenda nobis fuit hypothesis paulo ante proposita, & duobus prioribus modis, quibus vitiatur æquilibrium addendus fuit tertius modus hic indicatus; hi tamen modi quibus in proposita hypothesi diximus æquilibrium vitiari, omnes ad vnum reduci possunt: dicendo quod in proposita hypothesi vitietur æquilibrium, si cæteris manentibus varietur distantia puncti A, à linea Z B per quam trahit impedimentum: hæc enim distantia

tia in primo ex enarratis tribus modis præcisè tantum augetur, atque in duobus reliquis modis eadem ista distantia præcisè tantum imminuitur: in singulis tamen ex dictis tribus modis præcisè tantum variatur distantia puncti A, à linea Z B per quam impedimentum trahit: atque enumerati tres modi quibus in proposita hypothesi æquilibrium vitiatur sunt potius tres diuersi modi variandi distantiam puncti A, à linea Z B per quam trahit impedimentum, à qua variatione distantiæ causatur æquilibrij vitium: quam tres diuersi modi vitiandi ipsum æquilibrium; etenim in singulis ex prædictis tribus modis, æquilibrij vitium eamdem causam habet, nimirum variationem distantiæ puncti A, à linea Z B per quam trahit impedimentum Z. Hæc cum ita sint, difficultas de qua hic agitur tota in eo consistit, vt exponatur, quare, & quomodo in proposita hypothesi æquilibrium vitietur, per variationem distantiæ puncti A, à linea Z B per quam trahit impedimentum Z.

Habes hic sub maiori aliquantulum vniuersalitate propositam difficultatem, quam potissimum in Statera proponit àtque considerat Aristoteles, qui eius solutionem non affert: insinuat tamen latebras ex quibus solutionem eruendam arbitratur: etenim post illa quæ paulo ante ex ipso attulimus, ità prosequitur; *omnium tamen huiusmodi causæ principium habet circulus.* Atque vt huius opinionis suæ fundamentum exponat, sic discurrit: *istud vero ratione contingit, ex mirabili enim mirandum quippiam accidere non est absurdum.* Deinde post enarratas aliquot circuli proprietates, id ipsum iterato inculcat. *Quapropter, vt dictum est prius, non est inconue-*

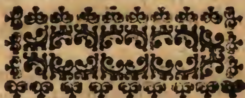
 niens

niens ipsum (nimirum circulum) *miraculorum omnium esse principium*. Verum licet tantopere sibi complaceat in eo naturæ effectu, quem in Statera obseruauerat, vt eum inter naturæ arcana, mirabilia, atque miracula referendum esse toties moneat: ac tandem pronuntiet, quod abstrusa effectus huius causa ex circuli proprietatibus eruenda sit: eam tamen ex latebris suis erutam nusquam proponit. Quod Aristoteles non præstitit, post ipsum plurimi conati sunt præstare, atque multum laborarunt, vt supra memorati effectus causam intelligibilem redderent, ac soluerent difficultatem à Philosopho propositam. Ex his authoribus plures sibi satisfecisse non nego, vnicuique sua facile videntur pulchra, atque omni defectu carentia; nisi tamen fallor hactenus lucem non vidit propositæ difficultatis solutio, quæ communi suffragio approbari meruerit: statuere an talis sit, quæ mihi in mentem venit, aliorum curæ permitto: si tamen præposterus erga propria affectus me non decipiat, non tantum numeris omnibus absoluta est ea solutio quam propono: verum etiam adeo facilis, vt maxime mirandum sit hactenus latuisse.

Quoniam vero propositam difficultatem soluere, nihil aliud est, quam vnicum, vel saltem præcipuum totius æquilibrij, ac Staticæ fundamentum stabilire: vt in tam vtilis quæstionis solutione nihil desit, eam in subsequentes tres partes distinguo. In illa quæ proxime sequitur sine vlla probatione assumo legem aliquam quam in scriptis meis de æquilibrio supposui, atque æquilibrij legem appellaui, ex qua lege deduxi præcipua fere omnia, quæ ad æquilibrium in machinis spectant. Verum in hac secunda parte tantum ostendo, ad

hanc

hanc legem consequi effectus superius enarratos, quorum causa inquiritur. In tertia parte rigoroso discursu, à priori, siue per causam demonstro, prædictæ legis veritatem: atque adeo in omni rigore soluo propositam difficultatem, in qua nihil aliud petitur, quam causa quare id fiat, quod fieri docet nostra lex æquilibrij. Denique in quarta parte, prætermissis discursibus magis rigorosis, familiari discursu resumo difficultates paulo ante propositas: & independenter ab Arithmetica, vel Geometria, ad singulas respondeo, atque expono causam (vt ita dicam) Physicam, quare cæteris paribus præcisè per maiorem distantiam hypomochlij à linea per quam trahit impedimentum, crescant impedimenti vires; siue quare fiat, quod idem impedimentum maiorem potentiam possit sustinere, quando maior est distantia hypomochlij à linea per quam trahit impedimentum, quam quando hæc distantia minor est.



PRO-

PROBLEMATIS STATICI

Pars Secunda.

Proponitur atque declaratur nostra lex æquilibrij, & ostenditur ad hanc legem necessario consequi effectus superius enarratos, quorum causam exponendum suscepimus.

Æquilibris Lex.

VT potentia cum impedimento sit in æquilibrio, necessario requiritur, & sufficit, vt potentia ad impedimentum habeat eandem proportionem quam habet perpendiculum impedimenti ad perpendiculum potentiæ.

Pro intelligentia terminorum quibus vtimur in hac nostra lege æquilibrij, atque adeo pro ipsius legis plena intelligentia, seruire poterunt quæ hic immediatè sequuntur.

Virga rigida, exempli gratia ferrea, dici potest Vectis: quando ità adhibetur, vt vnum eius punctum hæreat immobile: reliquæ verò partes circa punctum immobile circuma-

gi

gi possint, à singulis ex duabus virtutibus loco motiuis, quæ vel trahendo, vel impellendo, vel aliter agendo contra virgam rigidam, quantum est ex se versus partes oppositas circumagunt rigidam virgam, circa punctum immobile. Hinc vsualis Libræ iugum rigidum, ex cuius extremitatibus vtrinque pondera dependent, atque in aliqua sui media parte sustentatur: nihil aliud est quam Vectis. Similiter Stateræ iugum, Vectis est: in quantum in vna sui parte sustentatur atque adeo vna eius pars hæret immobilis atque contra duas alias eiusdem iugi partes agunt pondera ex iugo suspensa. Pari modo Vectis dici potest, baculus, cuius duæ extremitates à suppositis baiulorum humeris sustinentur, quando ex media aliqua baculi parte dependens pondus sustentatur, vel attollitur, vel lateraliter defertur aut trahitur. Denique ad conceptum siue essentiam Vectis videtur pertinere; primò longitudo: secundò rigiditas: tertiò realis, vel æquiualens immobilitas alicuius puncti: denique duarum virtutum sibi inuicem aduersantium contrarietas. Adeo vt, omne, & solum illud ens dici possit Vectis, quod, & longum, & rigidum est, quodque ex duabus virtutibus sibi inuicem aduersantibus, vna nititur circumducere circa punctum eius, quod realiter, vel æquiualenter immobile, altera vero nititur talem circumductionem impedire, vel simpliciter retinendo, vel aliter agendo.

Nota si duo pondera X & Z dependeant ex Libræ, vel Stateræ iugo C B: hæc pondera mediante iugo contra inuicem non agunt, nisi iugum C B retineatur in aliquo sui puncto A: eo ipso verò, quod iugum C B rigidum sit, & Fig. 1.

vnum

vnum eius punctum A hæreat immobile: iam pondera X&Z contra inuicem exercent virtutem suam; quod non minus accidit quando iugi punctum A omnino quiescit, atque omni motu locali caret, quam quando complexum ex iugo Libræ atque appensis ponderibus X & Z, lateraliter defertur, vel attollitur, aut deprimitur, exempli gratia à manu hoc complexum sustentante. Si in proposito casu iugi C B punctum A ità quiescat, vt nullo modo localiter moueatur, dicitur punctum A esse realiter immobile: idem verò punctum A tunc dicitur esse æquiualenter immobile, quando non caret omni motu locali, atque adeo non realiter est immobile, sed tamen non cedit actionibus ponderum X aut Z, atque adeo facit, vt pondera illa contra inuicem virtutem suam exerceant, ac si realiter atque absolute esset immobile: & consequenter in ordine ad actionem, qua pondera X & Z contra inuicem agunt, æquiualenter est immobile; ex quibus videtur satis manifestum quid hic intelligendum sit, per realem, vel æquiualentem immobilitatem, a qua dicimus realiter, vel æquiualenter immobile esse rigidæ materiæ punctum illud, quod appellamus hypomochlium.

Instrumentum cui conuenit prædictus conceptus Vectis, potest esse practicum, vel speculatiuum: practicum erit, si constet ex materia Physica siue practica, exempli gratia ferro, ære, ligno, &c. erit speculatiuum, si tantum constet ex materia Mathematica, atque speculatiua: exempli gratia ex linea Mathematica, quæ intelligitur rigida, atque inflexibilis; siue tamen Vectis practicus sit, siue speculatiuus, punctum eius, quod intelligitur præcisè tantum retineri siue sustentari,

ri, appellamus hypomochlium, prætereà ex duabus virtutibus sibi aduersantibus, quæque nituntur rigidam Vectis materiam versus oppositas partes mouere, vel retinere, vnam appellamus potentiam alteram impedimentum, vt his diuersis appellationibus melius ab inuicem distinguantur. Hypomochlium in Vecte Physico siue practico, est punctum Physicum: verùm in Vecte Mathematico siue speculatiuo, est punctum Mathematicum: similiter in Vecte practico singula puncta contra quæ immediatè agunt potentia, & impedimentum sunt puncta Physica: verùm in Vecte speculatiuo eadem illa duo puncta sunt puncta Mathematica. Inter Vectem practicum, & speculatiuum non alia differentia intercedit, quam quæ inuenitur inter materiam Physicam siue practicam, & materiam Mathematicam siue speculatiuam; prior vtilis est pro contemplationibus Physicis, siue vt cognoscantur effectus, qui praxi atque experientia disci possunt, quales sunt superius enarrati effectus quorum causa exponenda est: vel etiam vt hæc causa inquiratur, vel exponatur in aliquo rigore Physico; posterior necessaria est pro contemplationibus magis rigorosis, atque Mathematicis; vtque intelligatur vniuersaliter, & in rigore Mathematico verum esse, & quare verum sit, quod in casibus particularibus, atque in aliquo rigore Physico verum esse docet experientia: Quandoquidem igitur vniuersaliter atque in omni rigore Mathematico stabilienda sit proposita lex æquilibrij: & ostendendum sit dictam legem veram esse, & quare vera sit, in tali rigore & vniuersalitate: non practicum sed speculatiuum Vectem consideramus, hoc est lineam rigidam habentem hypomochlium, contra quam lineam agant sibi inui-

 cem

cem aduersantes virtutes, potentia & impedimentum: ita vt illæ virtutes quarum vna potentia altera impedimentum appellatur, aut trahendo, aut impellendo, aut simpliciter retinendo, aut alio quouis modo agant: tamen singulæ non agant nisi per vnam lineam Mathematicam: atque adeo singulæ immediatè non agant nisi contra vnicum punctum rigidæ lineæ hypomochlium habentis; quoniam vero virtus, quantum est ex se inducens aut impediens localem puncti motum per aliquam lineam, non agit immediatè contra tale punctum nisi per rectam lineam, per quam quantùm est ex se mouet, vel ab alia virtute tractum retinet tale punctum; patet rectam esse lineam per quam immediatè contra vnum rigidæ lineæ punctum agit potentia: & similiter rectam esse lineam, per quam immediatè contra vnum eiusdem rigidæ lineæ punctum agit impedimentum. Iam vero linea recta per quam potentia immediatè agit contra punctum rigidæ lineæ habentis hypomochlium, est illa, quam dicimus lineam per quam agit potentia; & similiter lineam per quam agit impedimentum, appellamus illam rectam lineam, per quam impedimentum immediatè agit contra punctum rigidæ habentis hypomochlium. Præterea perpendiculum potentiæ dicimus distantiam hypomochlij a linea per quam agit potentia; & pari modo perpendiculum impedimenti appellamus distantiam hypomochlij à linea per quam agit impedimētum. Denique potentiam cum impedimento dicimus esse in æquilibrio, quando duæ illæ virtutes adæquatè sibi inuicem resistendo, efficiunt, vt ad nullam consequatur motus localis, quem causaret non impedita ab altera virtute.

Ex his nisi fallor habetur sufficiens expositio terminorum

quibus

quibus vtimur in proponenda nostra lege æquilibrij, atque adeo quidquid requiri potest ad intelligentiam huius legis; reliquum est, vt ostendamus ad prædictam æquilibrij legem necessariò sequi effectus in præcedenti parte enarratos: etenim in hac parte non stabilimus, sed supponimus propositæ legis veritatem: quoties vero sermo est de Vecte speculatiuo, eamdem legem in omni rigore Mathematico veram esse, & quare vera sit, proponimus in tertia parte: in qua, si sufficienter euincimus intentum, etiam ex ipsa differentia quæ inter Vectem speculatiuum, & practicum intercedit; satis manifestum videtur, agendo de Vecte practico ac Physico, eamdem legem in rigore Physico veram esse, & quare vera sit, saltem apud eos, qui Matheseos ignari non sunt; quamobrem in quarta parte sermonem conuertimus ad eos, qui Mathesim ignorant: & neglectis proportionibus alijsque omnibus, quæ speculatiuam Mathesim redolent, exponimus causam Physicam, quare, & quomodo cæteris paribus, maior distantia hypomochlij à linea per quam agit impedimentum, causet quodammodo incrementum virium in ipso impedimento: adeo, vt possit sustinere, vel superare potentiam, à qua prius superabatur.

Propositio.

IN Vecte recto C B, siue speculatiuo siue practico, hypomochlium sit A, atque potentia X contra Vectem agat per rectam X C, perpendicularem ad C B: similiter contra eumdem Vectem agat impedimentum Z, per rectam Z B perpendicularem ad Vectem C B: præterea potentia X cum im- Fig. 4. 5. 6. vel 7.

pedimento Z sit in æquilibrio, siue hypomochlium A sit inter puncta C & B vt in figura 4. & 6. siue ad eiusdem hypomochlij partem sint puncta C & B, contra, quæ immediatè agunt potentia, & impedimentum, vt in figura 5. & 7.

Dico primò, quod vitiabitur æquilibrium, atque potentia X non poterit amplius sustinere impedimentum Z: si cæteris manentibus augeatur interuallum A B.

Dico secundò, quod vitiabitur æquilibrium, atque impedimentum Z non poterit amplius sustinere potentiam X: si cæteris manentibus imminuatur interuallum A B.

Dico tertiò, quod vitiabitur æquilibrium, atque impedimentum Z non poterit amplius sustinere potentiam X: si cæteris manentibus, linea Z B per quam agit impedimentum Z desinat esse perpendicularis ad rectam C B.

Probatur prima pars. Ex hypothesi patet, perpendiculum potentiæ X, esse interuallum A C: & perpendiculum
Fig. 4. vel 5. impedimenti Z esse interuallum A B: sed etiam per hypothesim antequam augeretur interuallum A B, potentia X erat in æquilibrio cum impedimento Z: ergo per legem æquilibrij antequam augeretur interuallum A B, potentia X ad impedimentum Z, habebat eamdem proportionem, quam interuallum A B habebat ad interuallum A C: atqui cæteris manentibus, atque aucto tantum interuallo A B, manifestum est, hoc auctum atque adeo maius interuallum A B, ad interuallum A C habere maiorem rationem, quam non auctum atque minus interuallum A B, habeat ad idem interuallum A C: ergo etiam cæteris manentibus atque aucto tantum interuallo A B, manifestum est, hoc maius atque auctum interuallum A B ad interuallum A C, habere

maio-

maiorem rationem, quam potentia X habeat ad impedimentum Z: ergo cæteris manentibus atque aucto tantùm interuallo AB, etiam potentia X ad impedimentum Z habebit minorem rationem, quam habeat impedimenti Z perpendiculum, hoc est interuallum auctum A B, ad potentiæ X perpendiculum A C: ergo aucto interuallo A B potentia X deberet augeri, vt potentia X ad impedimentum Z haberet eamdem proportionem, quam habet perpendiculum impedimenti Z ad perpendiculum potentiæ X: ergo etiam aucto interuallo A B, per æquilibrij legem patet, quod potentia X deberet augeri, vt potentia X posset sustinere in æquilibrio impedimentum Z; igitur in proposita hypothesi vitiabitur æquilibrium, atque potentia X non poterit amplius sustinere impedimentum Z: si cæteris manentibus augeatur interuallum A B. Vt dicitur in prima assertione.

Reliquæ duæ partes propositæ propositionis, planè simili discursu inferuntur; malui tamen istarum partium probationes propemodum superfluas hic addere, quam permittere vt ab aliquo desiderentur.

Probatur secunda pars. Ex hypothesi patet perpendiculum potentiæ X esse interuallum A C, & perpendiculum impedimenti Z esse interuallum A B: sed etiam antequam imminueretur interuallum A B, potentia X erat in æquilibrio cum impedimento Z: ergo per legem æquilibrij, antequam imminueretur interuallum A B, potentia X ad impedimentum Z habebat eamdem proportionem quam interuallum A B habebat ad interuallum A C: atqui cæteris manentibus, atque imminuto tantùm interuallo A B, patet hoc imminutum atque adeo minus interuallum A B, ad Fig. 4. vel 5.

inter-

interuallum A C habere minorem rationem, quam non imminutum atque maius interuallum A B, habeat ad interuallum A C: ergo cæteris manentibus atque imminuto tantùm interuallo A B, patet hoc minus atque imminutum interuallum A B, ad interuallum A C habere minorem rationem, quam potentia X habeat ad impedimentum Z: ergo cæteris manentibus atque imminuto tantum interuallo A B, potentia X ad impedimentum Z habebit maiorem rationem, quam habeat impedimenti Z perpendiculum, hoc est interuallum imminutum A B, ad potentiæ X perpendiculum A C: ergo imminuto interuallo A B impedimentum Z deberet augeri, vt potentia X ad impedimentum Z haberet eamdem proportionem, quam habet perpendiculum impedimenti Z ad perpendiculum potentiæ X: ergo etiam imminuto interuallo A B, per æquilibrij legem patet, quod impedimentum Z deberet augeri, vt impedimentum Z sustineret in æquilibrio potentiam X: igitur in proposita hypothesi vitiabitur æquilibrium, atque impedimentum Z non poterit amplius sustinere potentiam X: si cæteris manentibus imminuatur interuallum A B. Vt dicitur in secunda parte.

Fig. 6. vel 7. Probatur tertia pars. Antequam recta Z B desinat esse perpendicularis ad rectam C B, ex ipsa hypothesi patet perpendiculum potentiæ X, esse rectam A C: & perpendiculum impedimenti Z esse rectam A B: sed etiam per hypothesim, antequam recta Z B desineret esse perpendicularis ad rectam C B, potentia X erat in æquilibrio cum impedimento Z: ergo per legem æquilibrij, antequam recta Z B desineret esse perpendicularis ad rectam C B, potentia X ad impedimenum Z habebat eamdem proportionem quam recta A B habet

bet ad rectam A C: atqui cæteris manentibus, postquam recta Z B desijt esse perpendicularis ad rectam C B satis patet perpendiculum impedimenti Z esse imminutum adeoque perpendiculum impedimenti esse lineam minorem recta A B, licet potentiæ X, perpendiculum A C idem perseueret: quoniam igitur linea minor quam A B, ad eamdem A C, habet minorem proportionem: quam recta A B habeat ad rectam A C: etiam cæteris manentibus, postquam recta Z B desijt esse perpendicularis ad rectam C B, potentia X ad impedimentum Z habebit maiorem rationem, quam perpendiculum impedimenti Z, habeat ad potentiæ X, perpendiculum A C: ergo cæteris manentibus, postquam recta Z B desijt esse perpendicularis ad rectam C B: impedimentum Z deberet augeri, vt potentia X ad impedimentum Z haberet eamdem proportionem quam perpendiculum, impedimenti Z habet ad perpendiculum potentiæ X: ergo etiam cæteris manentibus, postquam recta Z B desijt esse perpendicularis ad rectam C B, per æquilibrij legem, impedimentum Z deberet augeri, vt potentia X cum impedimento Z esset in æquilibrio: igitur in proposita hypothesi vitiabitur æquilibrium, atque impedimentum Z non poterit amplius sustinere potentiam X: quando cæteris manentibus, recta Z B desinit esse perpendicularis ad rectam C B. Vt asseritur in tertia parte.

Plura non videntur requiri, immo plura quam requirebantur proposuimus, vt constet verissimum esse, quod exposita æquilibrij lege, probandum supererat in hac parte: nimirum ad ipsam æquilibrij legem nostram necessariò consequi singulos effectus in Statera obseruatos, atque annota-

tos

tos in præcedenti parte, quorum effectuum causa inquiritur in proposito problemate, quamobrem, si, in omni rigore Mathematico demonstremus veritatem propositæ legis; negari non poterit in hoc eodem rigore à nobis demonstratos esse effectus omnes, quos iam ostendimus necessariò connexos esse cum propositæ legis veritate: igitur ad rigorosam propositi problematis solutionem, illud tantum desideratur, quod præstamus in proximè sequenti parte; in qua licebit obseruare specimen aliquod Methodi insinuati in idea nostræ Logisticæ, vt à pura Mathesi transeatur ad Mathesim mixtam.

PROBLEMATIS STATICI

Pars Tertia.

In qua rigorosis discursibus demonstratur veritas legis æquilibrij, quæ assumitur in secunda parte; & ad quam legem ibidem ostensum est necessariò consequi effectus, quorum causa petitur in proposito problemate.

NOta primò. Virtus motiua (hoc est virtus capax causare localem motum) quantum est ex se, semper agit per rectam lineam. Vbi non negatur, quod exempli gratia pondus X trahens Stateræ iugum, siue Vectem CB: non possit in Vecte illo causare motum circularem circa hypo-

Fig. 1.

hypomochlium A; sed negatur talem circularem motum causari posse præcisè à virtute siue pondere X: quod pondus non grauitat nisi per rectam lineam, & quantum est ex se non trahit punctum B ex quo suspenditur, nisi per rectam lineam; hæc tamen tractio puncti B per rectam lineam, causat in Vecte B C, motum circularem, in quantum Vectis B C punctum A aliunde retinetur: adeo vt virtus X quantum est ex se, tantum trahat punctum B per rectam lineam; quod verò hæc tractio concurrens cum retentione atque immobilitate puncti A positi in eodem Vecte in quo est punctum B, causet in puncto B motum circularem circa punctum A, non impedit, quod virtus X quantum est ex se tantum per rectam lineam trahat punctum B. Similiter in alijs casibus in quibus aliqua virtus motiua, vel trahendo, vel impellendo, vel aliter agit contra aliquod punctum B, virtus illa motiua quantum est ex se præcisè, tantum trahit, vel impellit punctum B per lineam rectam.

Nota secundò. Ex ijs quæ in prima nota dicta sunt, habetur fundamentum repræsentandi per rectas lineas ipsas virtutes motiuas secundum se consideratas, atque applicandi ijsdem virtutibus motiuis proprietates rectarum linearum; & primo patet quomodo per diuersas lineas rectas commode proponi, atque exponi possit proportio, quæ inuenitur inter diuersas virtutes motiuas secundum se consideratas. Secundo sicut vna, immo eadem recta linea intelligi potest extendi in longum tantum: vel in latum tantum: vel obliquè, hoc est partim in longum partim in latum, pro vt sit respectus ad diuersos terminos longitudinis aut latitudinis: ità etiam vna, immo eadem virtus motiua, potest considerari

agere, vel in longum tantum: vel in latum tantum: vel obliquè hoc est partim in longum partim in latum: pro vt sit respectus ad diuersos terminos longitudinis atque latitudinis. Exempli gratia sit rectangulum C E, habens diame-
Fig. 2. trum D F: atque recta C B perpendiculariter occurrat diametro D F in puncto A. Recta D F, excurret in longum tantum: si pro termino longitudinis assumatur recta C B aut alia linea rectę C B parallela. Eadem linea D F, excurret tantum in latum: si pro termino latitudinis assumatur recta C B, vel alia recta ipsi C B parallela. Similiter eadem linea D F excurret obliquè, hoc est partim in longum partim in latum: si pro termino longitudinis assumatur recta C D, aut alia linea rectæ C D parallela; quo posito terminus latitudinis erit recta D E, aut alia linea rectæ D E parallela: semper enim terminum longitudinis ad terminum latitudinis perpendicularem esse patet ex conceptu talium terminorum. Quoniam verò virtus agens tantum in longum, nihil aliud est, quam virtus motiua, quæ quantum est ex se non agit nisi per lineam rectam præcisè in longum excurrentem: & pari modo virtus agens tantum in latum appellatur, quæ quantum est ex se agit præcisè per lineam rectam, tantum in latum excurrentem: ac denique virtus obliqua, siue partim in longum partim in latum agens, appellatur, quæ quantum est ex se agit per rectam lineam partim in longum partim in latum, atque adeo obliquè excurrentem; manifestum est quod virtus motiua agens per rectam D F, dici possit, vel virtus agens in longum tantum, vel virtus agens in latum tantum, vel virtus obliqua siue partim in longum partim in latum agens, pro vt sit respe-

ctus

ctus ad diuersos terminos longitudinis atque latitudinis.

Nota tertio. Quando virtus motiua exprimitur per aliquam rectam lineam, Exempli Gratia quando dicitur virtus D F, vel virtus D C, vel virtus D E &c. significantur virtutes quæ secundum se consideratæ tantum agunt per rectas per quas repræsentantur, ac præterea inter se habent eamdem proportionem quam habent rectæ lineæ per quas repræsentantur: sic vt virtus X bene repræsentetur per rectam lineam D F, & insuper virtus Z bene repræsentetur per rectam lineam D C, præcisè requiritur & sufficit, primò vt virtus X agat per lineam D F, & virtus Z agat per lineam D C: secundò vt virtus X ad virtutem Z habeat eamdem proportionem, quam linea D F habet ad lineam D C; tunc vero intelligimus virtutem X ad virtutem Z habere eamdem proportionem quam recta D F habet ad rectam D C, quando quantitas quæ est mensura virtutis X ad quantitatem quæ est mensura virtutis Z habet eamdem proportionem, quam habet recta D F ad rectam D C: Ex.Gr. si corpus quod præcisè sustentare potest virtus X ad homogeneum corpus quod præcisè sustentare potest virtus Z, habeat eamdem proportionem quam linea D F habet ad lineam D C; quod hic breuiter monendum putaui, quandoquidem enim apud nos proportio quantitas sit, virtus X ad virtutem Z non potest dici aut intelligi habere proportionem, nisi in quantum de mensurato affirmatur illud quod propriè conuenit mensuræ, vt moneo in ideæ meæ Logisticæ parte prima & secunda. Hoc monitum poterunt negligere, & quod in illo dicitur inter superflua scrupula referre: qui meliori quam ego di-

glutiendi facultate præditi sunt: quique potius dicendi sunt Mathematicas veritates capaciori vt ità dicam gustare deglutiendo absumere quam perspicaci mente intelligendo assequi; quales mihi videntur qui tam præclarè intelligunt eam quantitatem de qua agit Mathesis, vt huiusmodi quantitatibus annumerent virtutem motiuam, tempus, velocitatem &c. Vel certe qui sine ipsa proportionis definitione, sufficienter assequuntur, ad Mathesim spectantem proportionum doctrinam; pro huiusmodi vt ità dicam, helluonibus plane inutile, atque superfluum est monitum, postremo loco hic paucis propositum atque necessarium pro ijs qui in Mathematicis methodum nostram adhibent.

Nota quarto. Si duæ virtutes inter se æquales, impellant vel trahant idem punctum A, versus partes directè oppositas inter se: punctum A necessario manebit immotum, siue subsistet in eodem loco, neque ad vllam ex his partibus inter se oppositis deferetur, quantum est ex vi duarum istarum virtutum sibi inuicem aduersantium. Similiter si punctum A maneat immotum sic vt non moueatur ex vi vllius ex duabus virtutibus versus partes directè oppositas impellentibus punctum A: duæ illæ virtutes erunt æquales inter se. Hæc assertio sufficienter manifesta ex ipsis terminis, probatione non indiget: fortassis tamen non erit superfluum, eam paucis in exemplo declarare. Sit igitur punctum A quantum est ex se planè indifferens ad motum vel quietem, atque duæ virtutes X & Z toto conatu agendo contra punctum A, nitantur illud trahere versus partes inter se directè oppositas, sic vt vna virtus X nitatur trahere punctum A præcisè versus meridiem, & virtus Z nitatur trahere idem punctum A præcisè versus sep-

tem-

temtrionem : hoc posito asseritur primò quod si virtutes X & Z sint æquales inter se, punctum A neque accessurum ad meridiem neque ad septemtrionem : asseritur secundò quod si in eodem casu punctum A neque ad meridiem neque ad septemtrionem accedat, legitimè inferri posse virtutes X et Z inter se æquales esse.

Propositio I.

Qualescunque eiusdem generis quantitates sint A, B, C, D, E, F, ità tamen vt ratio A *ad* B, æquetur rationi C *ad* D: et præterea ratio A *ad* E, æquetur rationi C *ad* F.

Dico rationem B *ad* E æquari rationi D *ad* F.

Demonstratio. Per hypothesim, A *ad* B = C *ad* D, et præterea A *ad* E = C *ad* F: ergo permutando, A *ad* C = B *ad* D, et insuper A *ad* C = E *ad* F: ergo B *ad* D = E *ad* F: igitur permutando, B *ad* E = D *ad* F. Quod erat demonstrandum.

Propositio II.

Rectæ lineæ CA, AB, AF, AD, sint qualescunque: ita tamen, vt ratio AB *ad* AD æquetur rationi AF *ad* P; & præterea ratio CA *ad* AF æquetur rationi AD *ad* R. Fig. 8.

Dico rationem R *ad* P æquari rationi AB *ad* CA.

Demonstratio. Per hypothesim, AB *ad* AD = AF *ad* P: & præterea, CA *ad* AF = AD *ad* R : ergo per axio-

ma

ma tertium partis 4. ideæ, A B *in* P = A D *in* A F, & præterea C A *in* R = A D *in* A F: ergo A B *in* P = C A *in* R: ergo per axioma tertium partis 4. ideæ, R *ad* P = A B *ad* CA. Quod erat demonstrandum.

Propositio III.

Fig. 2. SIt rectangulum C E, cuius diameter D F sit perpendicularis ad rectas C A, & E K: atque recta C A producta occurrat lateri D E in puncto B.

Dico primò, rationem B C *ad* A C æquari rationi D F *ad* K D.

Dico secundò, rationem B C *ad* A B æquari rationi F D *ad* D A.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim figura C E est rectangulum, adeoque lineæ rectæ C F & D E sunt parallelæ: ergo per theor. 11. partis 3. ideæ, B A *ad* A C = D A *ad* A F: ergo componendo, B C *ad* A C = D F *ad* A F: sed K D = A F (quandoquidem ex conceptu ductus primi, ex quo rectangulum oritur, constet lineas C F & D E esse æquales atque parallelas inter se, adeoque per theor. 4. partis 3. ideæ angulus C F A = angulo E D K, & insuper rectus angulus C A F = recto angulo E K D: & consequenter per theor. 5. partis 3. ideæ triangula C A F & E K D similia sint atque latera C F & D E habeant æqualia) igitur B C *ad* A C = D F *ad* K D. Vt dicitur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim figura C E est rectangulum, adeoque lineæ rectæ C F & D E sunt parallelæ: ergo per theor. 11. partis 3. ideæ, C A *ad* A B = F A

ad

ad A D : ergo componendo, C B *ad* A B = F D *ad* A D. Vt asseritur in secunda parte.

Corollarium.

HInc etiam patet, quod D A = F K : & præterea quod D K = F A; vt ostensum est in ipsa demonstratione.

Propositio IV.

REctangulum D E, habeat diametrum D F: atque recta D F, D C, D E, singulæ repræsentent virtutem motiuam. Fig. 2.

Dico primo, duas virtutes D C & D E, esse obliquas: si virtus D F est directa.

Dico secundò, virtutem D F esse obliquam: si duæ virtutes D C & D E sint directæ.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim rectæ C D & C E sunt obliquæ ad rectam D F: ergo etiam rectæ C D & D E, sunt obliquæ, ad quamlibet rectam quæ est perpendicularis vel parallela ad rectam D F: sed terminus ad quem fit respectus, quando virtus D F dicitur directa, necessariò est perpendicularis vel parallelus ad rectam D F: ergo etiam rectæ D C & D E sunt obliquæ, respectu facto ad eumdem terminum: ergo etiam virtutes D C & D E erunt obliquæ respectu facto ad eumdem terminum: ergo virtutes D C & D E erunt obliquæ, si virtus D F est directa.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim patet, re-

ctam D F esse obliquam ad rectas D C & D E : ergo etiam recta D F est obliqua, ad quaslibet rectas perpendiculares aut parallelas rectæ D C vel D E : sed termini ad quos fit respectus quando virtutes D C & D E sunt directæ, necessariò sunt paralleli aut perpendiculares rectis D C & D E : ergo recta D F est obliqua, ad terminos, ad quos fit respectus, quando virtutes D C & D E dicuntur directæ : ergo virtus D F etiam est obliqua respectu facto ad eosdem istos terminos: ergo virtus D F est obliqua, si duæ virtutes D C et D E sint directæ. Quod erat propositum.

Propositio V.

Fig. 2. RECtangulum C E habeat diametrum D F, ad quam perpendiculares sint rectæ E K, et C A, præterea singulæ lineæ D K, D A, D C, D E, repræsentent singulas virtutes motiuas, ex quibus D K directa sit, atque in latum.

Dico primo, virtutem D E obliquam esse; atque obliquæ virtutis D E actionem in latum, æquari directæ virtuti D K.

Dico secundo, virtutem D C obliquam esse, atque obliquæ virtutis D C actionem in latum, æquari directæ virtuti D A.

Demonstratur prima pars: Per hypothesim virtus D K est directa, atque in latum : ergo terminus latitudinis est perpendicularis ad rectam D F, atque adeo parallelus rectæ K E: ergo puncta K & E, æqualiter distant à termino latitudinis: ergo virtus D E, mouens tempore X, mobile Z, ex D vsque in E: et virtus D K, eodem tempore X, mouens idem mobile Z, ex D vsque in K: eodem tempore æqualiter remo-

remouent idem mobile à termino latitudinis; ergo virtutes D K & D E æqualiter mouent in latum: sed quoniam per hypothesim virtus D K, adeoque virtus D F est directa, per prop. 4. virtus D E est obliqua: ergo virtus D E est obliqua, atque obliquæ virtutis D E actio in latum, æquatur directæ virtuti D K. Vt dicitur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim virtus D K est directa atque in latum: ergo terminus latitudinis, est perpendicularis ad rectam D F, atque adeo parallelus rectę C A: ergo puncta C & A æqualiter distant à termino latitudinis: ergo virtus D C, mouens tempore X, mobile Z, ex D vsque in C: & virtus D A, eodem tempore X, mouens idem mobile Z, ex D vsque in A: eodem, siue æquali tempore, æqualiter remouent idem mobile à termino latitudinis: ergo virtutes D A & D C, æqualiter mouent in latum: sed quoniam per hypothesim virtus D A, atque adeo virtus D F, est directa: per prop. 4. virtus D C est obliqua: ergo virtus D C est obliqua, atque obliquæ virtutis D C, actio in latum, æquatur directæ virtuti D A. Vt asseritur in secunda parte.

Corollarium.

Hinc etiam patet, actionem in latum obliquæ virtutis D E, æquari directæ actioni virtutis F A: & præterea actionem in latum, obliquæ virtutis D C, æquari directæ actioni virtutis F K. Etenim per hypothesim, eiusdem rectæ D F, partes sunt F A, D K, F K, D A: & præterea per coroll. prop. 3. etiam F A = D K, item F K = D A: igitur virtus F A directa est, & æqualis directæ virtuti D K, item virtus

F K directa est & æqualis directæ virtuti D A; cum igitur ostensum sit actionem in latum obliquæ virtutis D E, æquari directæ actioni virtutis D K: etiam actio in latum obliquæ virtutis D E, æquatur directæ actioni virtutis F A; et similiter quia ostensum est actionem in latum obliquæ virtutis D C, æquari directæ virtuti D A: etiam actio in latum obliquæ virtutis D C, æquatur directæ virtuti F K. Quod erat demonstrandum.

Propositio VI.

Fig. 2 Rectangulum C E, habeat diametrum D F: ad quam sint perpendiculares rectæ E K et C A: præterea singulæ lineæ D F, D A, D C, D E, repræsentent singulas virtutes motiuas, ex quibus D F directa, sit atque in latum.

Dico quod virtus directa D F sola, tantum præcisè agit in latum: quantum simul, sed in latum, agunt duæ virtutes obliquæ D E et D C.

Demonstratio. Per prop. 5. obliqua virtus D E, tantum præcisè agit in latum, quantum in latum agit directa virtus D K: sed per prop 5. & coroll. etiam obliqua virtus D C, tantum præcisè in latum agit, quantum in latum agit directa virtus K F: ergo duæ virtutes directæ D K et K F simul sumptæ, hoc est tota virtus directa D F, tantum præcisè in latum agit, quantum in latum agunt duæ virtutes obliquæ D E et D C simul sumptæ. Quod erat demonstrandum.

Pro-

Propositio VII.

SIt recta rigida C B, cuius pars C A ad partem A B habeat quamcunque rationem. Præterea quælibet virtus X agat immediatè contra punctum A per lineam perpendicularem ad rectam C B: sitque actio virtutis X directa in latum. Fig. 2.

Dico Actionem qua virtus X immediatè atque in latum agit contra punctum A, ad actionem qua virtus X mediatè atque in latum agit contra punctum B, habere proportionem quam B C habet ad A C. Præterea actionem qua virtus X immediatè atque in latum agit contra punctum A, ad virtutem qua virtus X mediatè atque in latum agit contra punctum C, habere proportionem quam recta B C habet ad rectam B A.

Constructio. Diametro C B descriptus sit semicirculus, cui in D occurrat recta A D, perpendicularis ad rectam C B: sintque ductæ rectæ C D et D B. Præterea ducta sit recta C F parallela rectæ D B, quæ rectæ D A productæ occurrat in F: recta vero F E parallela rectæ C D, occurrat in E rectæ D B productę; sitque recta E K perpendicularis ad rectam D F. Denique recta D F repræsentet virtutem X.

Demonstratio. Quoniam per hypothesim actio qua virtus D F immediatè agit in punctum A, est actio directa atque in latum, per constructionem atque propositionem sextam sola virtus D F tantum præcisè agit in latum, quantum simul sed in latum agunt duæ virtutes obliquæ D E & D C: atqui per notam 3. virtutes æqualiter in la-

 tum

tum agentes contra rectam rigidam B C, æqualiter illam impellunt in latum: ergo rigida recta B C æqualiter impellitur in latum, siue contra illam agat sola virtus directa D F, siue contra illam agant duę virtutes obliquæ D E et D C: sed per constructionem directa virtus D F, immediatè agit in punctum A, & obliqua virtus D E immediatè agit in punctum B, ac denique obliqua virtus D C immediatè agit in punctum C; ergo in ordine ad motum in latum rigidæ C B, tantum præcisè valet virtus directa D F immediatè agens in punctum A, quantum simul valent duæ virtutes obliquæ D E & D C, quarum prior D E immediatè agit in punctum B, atque posterior D C immediatè agit in punctum C: atqui per construct. & coroll. prop. 5. actioni in latum obliquæ virtutis D E, æquatur actio directa virtutis A F: et actioni in latum obliquæ virtutis D C, æquatur actio directa virtutis D A: ergo virtus directa D F immediatè agens in punctum A, mediatè atque in latum tantum præcisè agit in puncta B et C, quantum immediatè atque in latum in eadem illa puncta B & C, agerent simul duæ virtutes directæ A F & D A, quando prior ageret in punctum B, posterior ageret in punctum C: ergo virtus directa D F immediatè atque in latum agens in punctum A, ad virtutem qua mediatè atque in latum agit in punctum B, est vt D F *ad* A F; item virtus directa D F immediatè atque in latum agens in punctum A, ad virtutem qua mediatè atq; in latum agit in punctum C, est vt D F *ad* D A: sed per pro. 3. eiusq; corol. D F *ad* A F = B C *ad* A C: item D F *ad* D A = B C *ad* B A: ergo virtus directa D F, hoc est per constructionem virtus X, immediatè atque in latum agens in punctum A, ad virtutem qua mediatè atque in latum

latum agit in punctum B, est vt B C *ad* A C; item virtus X immediatè atque in latum agens in punctum A ad virtutem qua mediatè atque in latum agit in punctum C, est vt B C *ad* B A. Quod erat demonstrandum.

Propositio VIII.

Sit recta rigida C B, cuius pars C A ad partem A B, habeat quamcunque rationem. Præterea quælibet virtus X, agat immediatè contra punctum A, per lineam perpendicularem ad rectam C B: sitque actio virtutis X directa in latum. Fig. 2.

Dico actionem, qua virtus X mediatè atque in latum agit contra punctum B, ad actionem qua eadem virtus X mediatè atque in latum agit contra punctum C, habere proportionem quam recta A C habet ad rectam A B.

Demonstratio. Per prop. 7. actio qua virtus X immediatè atque in latum agit in punctum A, ad actionem qua mediatè atque in latum agit in punctum B, est vt B C *ad* A C: sed per eamdem propositionem, etiam actio qua virtus X immediatè atque in latum agit in punctum A, ad actionem qua mediatè atque in latum agit in punctum C, est vt BC *ad* B A: ergo per prop. 1. actio qua virtus X immediatè atque in latum agens in punctum A, mediatè atque in latum agit in punctum B, ad actionem qua mediatè atque in latum agit in punctum C, est vt C A *ad* A B. Quod erat demonstrandum.

Pro-

Propositio IX.

Fig. 3. SIt recta rigida C B cuius partes C A & A B habeant quamcunque proportionem, præterea virtus R ad virtutem Z habeat rationem quam B C habet ad C A: item virtus R ad virtutem X habeat rationem quam B C habet ad A B: sintque rectæ X C, R A, Z B perpendiculares ad rectam rigidam C B. Denique singulæ virtutes X, R, Z, agant immediatè per lineas ad rectam rigidam C B perpendiculares in quibus existunt.

Dico puncta C & B æqualiter in latum trahi, siue sola virtus R agat immediatè in punctum A per rectam R A, siue duæ virtutes X & Z simul immediatè agant in puncta C&B, per lineas X C & Z B:

Demonstratio. Per hypothesim virtus R immediatè agens in punctum A, per lineam R A, est virtus directa in latum: ergo per prop. 7. virtus R immediatè atque in latum agens in punctum A, ad virtutem qua mediatè atque in latum agit in punctum B, est vt C B *ad* C A: sed per hypothesim virtus R ad virtutem Z, est vt C B *ad* C A, & tota virtus Z immediatè atque in latum agit contra punctum B: ergo virtus R immediatè atque in latum agens in punctum A, tantum mediatè atque in latum agit contra punctum B, quantum contra idem punctum B immediatè atque in latum agit virtus Z: ergo punctum B tantum præcise in latum trahitur à virtute R quæ immediatè agit contra punctum A, quantum in latum trahitur à virtute Z quæ immediatè agit contra punctum B: sed simili prorsus argumento etiam patet, quod

punctum

punctum C, tantum præcisè in latum trahatur à virtute R, quæ immediatè agit contra punctum A, quantum in latum trahitur à virtute X quæ immediatè agit contra punctum C: ergo puncta B & C æqualiter in latum trahuntur, siue sola virtus R immediatè agat in punctum A per rectam R A, siue duæ virtutes X & Z simul, immediatè agant in puncta C & B per lineas X C & Z B. Quod erat demonstrandum.

Propositio X.

Sit recta rigida A B cuius partes C A & A B habeant quamcunque proportionem: sintque rectæ X C, R A, Z B, perpendiculares ad rectam rigidam C B: atque singulæ virtutes R, X, Z, agant immediatè per lineas, ad rigidam rectam perpendiculares in quibus existunt: ità tamen, vt virtutes X & Z trahant versus partem oppositam illi, per quam trahit virtus R. Fig. 4.

Dico primò, rectam rigidam C B hæsuram immobilem, si virtus R ad virtutem Z, sit vt C B *ad* C A: atque insuper virtus R ad virtutem X sit vt C B *ad* A B.

Dico secundò, virtutem R ad virtutem Z, esse vt C B *ad* C A; & præterea virtutem R ad virtutem X, esse vt C B *ad* A B: si rigida recta C B hæreat immobilis.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim & propositionem 9. patet, quod singula puncta C & B tantum præcisè in latum trahantur ab vna virtute R, quantum in latum trahuntur à duabus virtutibus X & Z simul: sed etiam per hypothesim puncta C & B trahuntur ad vnam partem à virtute R, atque ad partem præcisè oppositam trahuntur à virtutibus

bus X & Z: ergo puncta singula C & B, à tribus virtutibus R, X, Z, ità trahuntur, vt singula æqualiter trahantur ad partes directè oppositas: ergo per notam 4. singula puncta C & B manent immota: ergo etiam rigida C B manet immota. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim rigida C B hæret immota: ergo per notam 4. singula puncta C & B, tantum præcisè in latum trahuntur versus vnam partem à virtute R, quantum in latum versus partem directè oppositam trahuntur à duabus virtutibus X & Z simul: sed per prop. 7. tota virtus R ad virtutem qua punctum C trahit in latum, est vt B C *ad* A B: item tota virtus R ad virtutem qua punctum B trahit in latum, est vt C B *ad* A C: ergo etiam tota virtus R ad virtutem qua X in latum trahit punctum C, est vt C B *ad* A B: & præterea tota virtus R ad virtutem qua Z in latum trahit punctum B, est vt C B *ad* C A: sed ex hypothesi patet, quod tota virtus X in latum agit contra punctum C, & insuper quod tota virtus Z in latum agit contra punctum B: ergo tota virtus R ad totam virtutem X, est vt C B *ad* A B: & præterea tota virtus R ad totam virtutem Z, est vt C B *ad* C A. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio XI.

SIt recta rigida C B habens solum punctum A immobile, atque positum inter puncta C & B: præterea, per rectas X C & Z B perpendiculares ad rigidam C B, agant duæ virtutes X & Z: ità vt virtus X agat per rectam X C, & virtus Z agat per rectam Z B, atque illæ virtutes trahant versus eamdem partem.

Dico

Dico primò, rigidam rectam C B hæsuram immobilem, si virtus Z ad virtutem X, habeat proportionem quam recta C A habet ad rectam A B. Fig. 4

Dico secundò, virtutem Z ad virtutem X, habere proportionem quam recta C A habet ad rectam A B, si rigida recta C B hæreat immobilis.

Constructio. Virtus R, æqualis virtutibus X & Z simul sumptis, intelligatur immediatè agere contra punctum A, per rectam R A perpendicularem ad rigidam C B: ità tamen vt virtus R trahat versus partem directè oppositam illi, versus quam trahunt singulæ virtutes X & Z.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim virtus Z ad virtutem X est vt C A *ad* A B: ergo componendo, vel componendo & inuertendo duæ virtutes X & Z simul, erunt ad virtutem Z, vt C B *ad* A C: item duæ virtutes X & Z simul, erunt ad virtutem X, vt C B *ad* A B: sed per constructionem virtus R æquatur virtutibus X & Z simul sumptis: ergo virtus R ad virtutem X est vt C B *ad* A B, item virtus R ad virtutem Z est vt C B *ad* A C: sed etiam virtus R agit versus partem oppositam illi per quam agunt singulæ virtutes X & Z: ergo per prop. 10. recta rigida C B hæret immobilis, quando trahitur à virtute R quæ sit æqualis virtutibus X&Z simul sumptis, atque trahentibus versus partem oppositam: sed manifestum est quod siue virtus R trahendo retineat punctum A virtute quæ sit æqualis virtutibus X&Z simul sumptis, siue punctum A ratione suæ immobilitatis retineatur virtute quæ sit æqualis virtutibus X & Z simul sumptis, vt fit in proposita hypothesi, semper æqualiter impediri motum rectæ rigidæ C B: igitur in proposita hypothesi rigida recta C B

hæret immobilis. Vt dicitur in prima parte.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim recta rigida C B hæret immota: ergo punctum immobile A tantum trahit, ſiue retinet, rigidam C B quantum duæ virtutes X & Z in latum atque ad eamdem partem agentes trahunt rigidam C B: ergo virtus immediatè agens in A, atque retinens rigidam C B: æquatur virtutibus X & Z ſimul ſumptis: ſed quoniam ſingulæ virtutes X & Z ſunt virtutes directè agentes in latum, etiam virtus immediatè in puncto A retinens rigidam C B, eſt virtus directa in latum: ergo virtus immediatè in A retinens rigidam C B, eſt virtus in latum, atque æqualis virtutibus X & Z ſimul ſumptis: ſed per prop. 8. virtus qua punctum C mediatè atque in latum retinetur à virtute immediatè reſiſtente in A, ad virtutem qua punctum B mediatè atque in latum retinetur à virtute immediatè reſiſtente in A, eſt vt A B *ad* C A: igitur cum per hypotheſim ſingula puncta C & B hæreant immota, atque adeo tanta virtute retineantur à virtute immediatè reſiſtente in A, quanta virtute ſingula trahuntur à virtutibus X & Z (quarum vna X tota agit contra punctum C, & altera Z tota agit contra punctum B): patet etiam virtutem X ad virtutem Z, eſſe vt A B *ad* A C. Vt aſſeritur in ſecunda parte.

Propoſitio XII.

Sit recta rigida C B habens ſolum punctum A immobile, ſed non poſitum inter puncta C & B: atque per rectas
Fig. 5. X C & Z B perpendiculares ad rigidam C B, agant duæ virtutes X & Z: ità vt virtus X agat per rectam X C, & virtus Z

agat

agat per rectam Z B, atque illæ virtutes trahant versus partes inter se oppositas.

Dico primò, rigidam rectam C B hæsuram immobilem, si virtus Z ad virtutem X habeat proportionem quam recta CA habet ad rectam A B.

Dico secundò, virtutem Z ad virtutum X habere proportionem quam recta C A habet ad rectam A B, si rigida recta C B hæreat immobilis.

Constructio. Intelligatur immediatè contra punctum A per rectam R A perpendicularem ad A B, agere virtus R, ità tamen vt virtus R trahat versus eamdem partem versus quam trahit virtus X, atque virtus Z sit æqualis virtutibus R & X simul sumptis.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim virtus Z ad virtutem X est vt C A *ad* B A: sed per constructionem virtutes R & X simul æquantur virtuti Z, et præterea B A simul cum C B æquantur ipsi C A : ergo virtus Z ad virtutem R est vt C A *ad* C B: igitur virtus Z ad virtutem X, est vt C A *ad* B A: item virtus Z ad virtutem R, est vt C A *ad* C B: atqui per hypothesim, etiam virtus Z trahit versus partem oppositam illi, per quam agunt singulæ virtutes R & X: ergo per prop. 10. rigida C B hæret immobilis, quando punctum A trahitur à virtute R: sed manifestum est quod siue punctum A retineatur à virtute R agente contra punctum A, siue punctum A ratione suæ immobilitatis retineatur eadem virtute, vt fit in proposita hypothesi, semper æqualiter impediri motum rectæ rigidæ CB: igitur in proposita hypothesi rigida recta C B hæret immobilis. Vt dicitur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim rigida recta CB manet immobilis, adeoque punctum C tantum immediatè atque in latum trahitur à virtute X, quantum ad partem oppositam mediatè atque in latum trahitur à virtute Z: ergo actio qua virtus X immediatè atque in latum trahit punctum C, æquatur actioni qua virtus Z mediatè atque in latum trahit punctum C: sed per hypothesim tota virtus X immediatè atque in latum trahit punctum C: ergo tota virtus X æquatur actioni qua virtus Z mediatè atque in latum trahit punctum C: sed per prop. 7. tota virtus Z ad actionem qua in latum trahit punctum C, est vt C A *ad* B A: ergo tota virtus Z ad totam virtutem X, est vt C A *ad* B A. Vt asseritur in secunda parte.

Propositio XIII.

Fig 6. vel 7. Sit recta rigida C B, contra quam immediatè agat virtus Z per rectam Z B, obliquam ad rectam rigidam C B: sitque A D perpendicularis ad rectam Z B.

Dico, virtutem obliquam Z, ad virtutem qua directè atque in latum agit contra punctum B, esse vt A B *ad* A D.

Nota considerari posse duos casus, quorum primus est, quando punctum A est inter puncta C & B: secundus est, quando punctum B est inter puncta A & C; pro primo casu seruit figura 6. pro secundo casu seruit figura 7. vtroque casu seruit eadem constructio & demonstratio.

Constructio. Recta B E perpendicularis ad rectam rigidam C B, occurrat rectæ A D productæ in E; præterea ducta sit recta F G, parallela rigidæ rectæ C B, atque illi in puncto

cto F occurrat recta E B producta : similiter in puncto G illi occurat recta D B producta. Denique recta G B repræsentet totam virtutem Z.

Demonstratio. Per theor. 3. partis 3. ideæ angulus D B E = angulo F B G : sed etiam rectus angulus B D E = recto angulo B F G : ergo per theor. 5. partis 3. ideæ, triangulum D B E est simile triangulo F B G : atqui per constructionem & theor. 10. partis 3. ideæ, etiam triangulum DBE est simile triangulo D A B : ergo triangulum D A B est simile triangulo F B G : ergo B A *ad* A D = G B *ad* F B : sed per propositionem quintam, obliqua virtus G B, hoc est per constructionem obliqua virtus Z, ad virtutem qua directè in latum agit contra punctum B, est vt G B *ad* F B : ergo obliqua virtus Z ad virtutem qua directè in latum agit contra punctum B, est vt A B *ad* A D. Quod erat demonstrandum.

Propositio XIV.

Recta rigida CB habeat hypomochlion in A, siue quod idem est, punctum eius A sit immobile ; præterea potentia X agat immediate contra punctum C per rectam X C : & impedimentum Z agat immediatè contra punctum B per rectam Z B ; sitque recta A D perpendicularis ad rectam Z B, item recta A F sit perpendicularis ad rectam X C. Fig. 8. vel 9.

Dico primò. Rectam rigidam C B hæsuram immobilem, atque adeo potentiam X futuram in æquilibrio cum impedimento Z : si potentia X ad impedimentum Z habeat proportionem quam recta A D habet ad rectam A F.

Dico secundò. Potentiam X ad impedimentum Z habere

re proportionem quam A D habet ad A F: si rigida C B hæreat immobilis, atque adeo potentia X sit in æquilibrio cum impedimento Z.

Nota duos casus aliquantulum diuersos considerari posse: quorum primus est, quando punctum A est inter puncta C & B: secundus est quando punctum B est inter C & A; Pro primo casu inspici potest octaua figura pro secundo casu seruit nona figura pro vtroque casu seruit eadem constructio & demonstratio, cum hac sola differentia, quod quando citatur propositio 11. vel 12. pro primo casu consulenda sit prop. 11. pro secundo casu consulenda sit prop. 12.

Constructio. Positæ sint duæ rectæ lineæ P & R, atque F A *ad* P = A B *ad* A D: item A D *ad* R = C A *ad* F A: Denique potentiam X repræsentet recta A D.

Demonstratur prima pars. Per prop. 13. tota potentia X ad virtutem qua potentia X in latum agit contra punctum C, est vt C A *ad* F A: hoc est per constructionem vt D A *ad* R: sed per constructionem potentia X æquatur rectæ A D: ergo virtus qua potentia X in latum agit contra punctum C æquatur ipsi R. Præterea quia per hypothesim tota potentia X ad totum impedimentum Z, est vt A D *ad* A F: & per constructionem tota potentia X æquatur ipsi A D: etiam totum impedimentum æquatur ipsi A F: sed per propositionem decimam tertiam totum impedimentum Z ad virtutem qua impedimentum Z in latum agit contra punctum B, est vt A B *ad* A D, hoc est per constructionem vt A F *ad* P: ergo virtus qua impedimentum Z in latum agit contra punctum B, æquatur ipsi P: sed per constructionem & prop. 2. patet R *ad* P esse vt A B *ad* A C: ergo virtus R qua

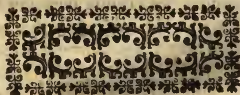
qua potentia X in latum agit contra punctum C, ad virtutem P qua impedimentum Z in latum agit contra punctum B, est vt A B *ad* A C: ergo per prop. 11. vel 12. potentia X cum impedimento Z hæret in æquilibrio. Vt asseritur in pima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim potentia X cum impedimento Z hæret in æquilibrio, hoc est rigida C B manet immobilis: ergo per prop. 11. vel 12. virtus qua potentia X in latum agit contra punctum C, ad virtutem qua impedimentum Z in latum agit contra punctum B, est vt AB *ad* A C: sed per constructionem & prop. 2. patet A B *ad* A C esse vt R *ad* P: ergo virtus qua potentia X in latum agit contra punctum C, ad virtutem qua impedimentum Z in latum agit contra punctum B, est vt R *ad* P: sed quoniam per constructionem tota potentia X æquiualet D A, & per prop. 13. tota potentia X ad virtutem qua potentia X in latum agit contra punctum C, est vt C A *ad* A F, hoc est per constructionem vt D A *ad* R, etiam virtus qua potentia X in latum agit contra punctum C æquiualet ipsi R: ergo virtus qua impedimentum Z agit in latum contra punctum B, æquiualet ipsi P: sed per prop. 13. totum impedimentum ad virtutem qua impedimentum Z agit contra punctum B, est vt A B *ad* A D, hoc est per constructionem vt A F *ad* P: ergo etiam totum impedimentum Z æquiualet ipsi A F: sed per constructionem etiam tota potentia X æquiualet ipsi A D: ergo tota potentia X ad totum impedimentum Z, est vt A D *ad* A F. Vt asseritur in secunda parte.

Scho-

Scholium.

VLtimo loco hic demonſtrata propoſitio nihil differt ab ipſa noſtra æquilibrij lege propoſita in ſecunda parte: adeoque in hac propoſitione 14. habetur rigoroſo diſcurſu demonſtrata atque ſtabilita noſtra lex æquilibrij, & conſequenter etiam legitime ſtabiliti habentur effectus qui ad hanc legem conſequuntur, inter quos numeratur effectus cuius cauſa quæritur in propoſito problemate, vt patet ex dictis in ſecunda parte: adeoque hactenus à me propoſitæ atque demonſtratæ propoſitiones legitimæ aut rigoroſæ non ſunt: vel certe legitimè atque rigoroſè demonſtrauimus noſtram æquilibrij legem, & conſequenter legitimè atque rigoroſè ſoluimus propoſitum problema de incremento virium per Vectem. Reliquum igitur eſt, vt eiuſdem problematis ſolutio magis familiari diſcurſu proponatur independenter ab omni ſpeculatiua Matheſi.



PRO-

PROBLEMATIS STATICI

Pars Quarta.

Siue Dialogus inter Mathimenum, Tachinum, & Nothrum, in quo, independenter ab omni Mathesi speculatiua affertur causa, quare vires crescant per Vectem, hoc est quare in Statera pondus minoris grauitatis sustineat aliud pondus maioris grauitatis, præcisè per hoc, quod magis distet à Stateræ hypomochlio.

SCænicis repræsentationibus non absimiles arbitror ab aliquibus Mathematicis vsitatos dialogos. In his inter se confabulantes vel disputantes introducuntur personæ, vt plurimum tres diuersæ; vna docentis partes sustinet, altera discentis, atque renitentis, doctrinæ quæ traditur: his tertia additur, vt subministret opportuna subsidia vel docenti vel discenti. Per scriptos dialogos docendi modus, nisi fallor, plurimum iuuat tardioris ingenij discipulos, & minus eruditos magistros; his enim commodum non est, ex suis principijs successiuè atque ordinatè deducere intentam doctrinam; & hoc modo deductam doctrinam assequi, istis non raro molestum est; deinde in scriptis dialogis, qui docet, non tenetur nisi ad interrogata respondere: & quoniam singulas interuenientium personarum partes componit, seipsum tan-

tum interrogat; atque adeo commodè declinare poteſt quaſlibet difficultates, non interrogando illa ad quæ reſpondere foret moleſtum; præterea ſemper in promptu habet qui doctrinæ ſuæ applaudat, ſolidam atque euidentem teſtetur, non acquieſcentem repræhendat, ſermonem deuertat vbi progredi moleſtum eſt, atque alijs huiuſmodi modis non paruum ſubſidium afferat parum erudito doctori.

Quoniam hæc mea opinio eſt de dialogis Mathematicis, non minus timerem ſubſequentem dialogum proponere, quam annumerari doctoribus quibus per dialogos docendi modum dixi prodeſſe, niſi prius ex primis principijs, ordinatis diſcurſibus deductam propoſuiſſem, eamdem, ſiue potius magis rigoroſam atque vniuerſalem doctrinam; qua præmiſſa pro Mathematicis, ad illos ſermonem conuerto quos minus iuuant diſcurſus magis rigoroſi, vtpote in Mathematicis diſciplinis minus verſati: exponendo propoſiti problematis ſolutionem illa methodo qua melius inſtruuntur ſpeculatiuæ matheſeos diſcurſibus minus aſſueti, apud quos eamdem propemodum ad perſuadendum vtilitatem habent dialogi, quam ad animi paſſiones mouendas habent ſcænicæ repræſentationes.

DIALOGVS.

NOthrus. Ex condicto adſum Mathimene, atque comitem adduxi Tachinum, quem ſocium habui in perlegendis quæ mihi tradideras.

Mathimenus. Fortunatus atque gratioſus congreſſus tot enim amica concurrunt capita, quot requiruntur, vt præſtem

ſtem, quod me præſtiturum promiſeram.

Nothrus. Enigma de ternario numero proponis Mathimene, atque ab obſcuris vt video ducimus exordium.

Mathimenus. Breui aduertes ſolutionem enigmatis, vbi à me probata, atque à te annotata erunt tria capita, hoc eſt tres diuerſæ veritates, ex quibus mihi concludendum eſt quod intendo probare.

Tachinus. Ego percepiſſe mihi videor Mathimene quæ in ſcriptis tuis legi: gaudebo tamen veſtris diſcurſibus auditor adeſſe, quandoquidem ex Nothro intellexerim hanc illi indictam diem, qua exponendam aſſumpſiſti cauſam quare vires creſcant per Vectem: idque prætermiſſa ſpeculatiua omni Geometria atque Arithmetica.

Mathimenus. Id me facturum pollicitus ſum: an promiſſis faciam ſatis, tu eſto iudex:

Tachinus. Res hæc mihi difficilis viſa eſt, & ſi ſuccedat non minus inexpectata mihi adueniet quam eiuſdem problematis ſolutio, quam cum Nothro attentius perlegi, quæque mihi omni ex parte noua accidit, & mirum in modum arriſit.

Nothrus. Ego Mathimene, vt verum fatear, ex tuis rigoroſis vt illos appellas diſcurſibus, vix aliud collegi, quam dubiorum meſſem ſatis copioſam: parum enim aſſuetus proportionibus iſtis Mathematicis, atque diſcurſibus rigoroſis, aſſequi non potui quid concludas, aut ſaltem à te concludi aſſeras; & vbi Tachinus meridianam lucem affulgere ſibi affirmat, ego præter tenebras vix aliquid conſpicio.

Mathimenus. Clariores ſolis radij, non raro obſunt oculis, quibus proſunt debiliores ſubminiſtrati à lucernæ

flamma: fortaſſis ſimile aliquid tibi accidet hodierna die; qua vt ſpero phyſici diſcurſus tibi proderunt vt intellectu conſpicias, quod te aſſecutum negas ex diſcurſibus magis rigoroſis. Reſumamus difficultatem cuius ſolutio petitur.

Nothrus. Ego illam proponam: ſic enim videbis an quæſtionis ſtatum rectè fuerim aſſecutus. Libræ vel Stateræ iugum C A B ſuſtentatum ſit in A: atque ex puncto B depen-
Fig. 10 deat pondus X; prætereà ex iugi brachio A C, dependeat pondus Z, ſic vt pondera X & Z ſint in æquilibrio: atque adeo pondus Z præcisè ſuſtineat pondus X. His ſuppoſitis atque cæteris omnibus manentibus, ſi ſolum pondus Z aliquantulum remoueatur à ſuſtentaculo A: per hoc quodammodo acquiret vires, adeo vt iam poterit attollere pondus X, quod prius tantum præcisè poterat ſuſtentare ſed nullo modo attollere: atque ita experimur paucarum vnciarum pondus Z, ſuſpenſum in magna diſtantia à ſuſtentaculo A, ſuſtinere vel attollere multarum librarum pondus X ſuſpenſum in parua diſtantia ab eodem ſuſtentaculo A. Huius effectus cauſa inquiritur: atque adeo petitur, quomodo idem pondus Z ſecundum ſe inuariatum, per ſolam maiorem diſtantiam à ſuſtentaculo A vires illas acquirat, per quas poteſt ſuſtentare vel attollere maius pondus? nunquid rectè?

Mathimenus. Satis rectè omnia; his tamen aliquid additum cuperem pro maiori claritate, nimirum vt pondus R mediante chorda A L trochleæ circumpoſita, ſuſtineat Stateram C B.

Nothrus. Hoc neque caſum meum, neque quæſtionis ſtatum variat; ſiue enim pondus R, ſiue manus, ſiue clauus muro infixus Stateram ſuſtineat, non variatur quæſtio: hæc

enim

enim omnia materialiter se habent in ordine ad propositam quæstionem, quæ semper formaliter eadem perseuerat in diuersis istis circumstantijs. Quæro igitur vnde petenda sit causa propositi effectus.

Mathimenus. Respondeo quod supposita rigiditate atque inflexibilitate iugi C B, causa petenda sit, à modo, quo virtus libram sustentans in A, mediante iugo rigido C A B agit contra pondera X & Z.

Nothrus. An igitur virtus R, sustentans complexum ex iugo C B & ponderibus X & Z, non semper eodem modo agit contra iugum & pondera, siue pondus Z magis siue minus distet à sustentaculo A?

Mathimenus. Semper eodem modo agit contra iugum C B, sed non semper eodem modo agit contra pondera X & Z.

Nothrus. Dura mihi accidit tua illa responsio: siue enim pondus Z, magis, siue minus distet à sustentaculo A, semper pondus R manet idem, & agit siue trahit per eamdem chordam R L A: & hæc virtus siue tractio per eadem iugi brachia extenditur ad chordas ex quibus pondera X & Z dependent; atque ità tandem trahuntur pondera X & Z; hic modus trahendi pondera X et Z semper perseuerat, siue cæteris paribus magis, siue minus distet pondus Z à sustentaculo A: atque adeo semper eodem modo trahuntur pondera X et Z, à pondere R; quam ob rem non assequor quid intelligas per modum diuersum, quando asseris pondera X et Z diuerso modo sustineri vel trahi à pondere R.

Mathimenus. Quod vno tempore trahitur maiori virtute, et alio tempore trahitur minori virtute: diuersis illis tempori

poribus diuerso modo trahitur; de hoc diuerso trahendi modo mihi sermo est; atque assero, quod pondus R non semper æquali virtute agat in singula pondera X et Z: sed subinde maiori, subinde minori virtute trahantur singula pondera X et Z, ab eodem pondere R: atque adeo pondus R non semper eodem modo agere contra pondera X et Z.

Nothrus. Nugaris vt opinor Mathimene, quandoquidem enim in casu nostro pondus R idem perseueret, semper æqualiter ponderat et semper tota sua virtute agit contra pondera X & Z; cui igitur persuadere poteris diuersa virtute agere contra pondera X et Z? an fortassis contrariæ propositiones non sunt, eadem siue non diuersa virtute agere, & diuersa virtute agere?

Tachinus. Nihil ad rem propositam facit contrarietas quam infers Nothre; pondus R semper æquali virtute grauitare et agere non negat Mathimenus, immò id expressè supposuit; similiter non negat pondus R semper æquali virtute agere contra duo pondera X & Z simul sumpta: sed tantum negat pondus R semper æqualiter grauitans, semper æquali virtute agere contra singula pondera X & Z. Claritatis gratia propositum casum reduco ad numeros. Exempli Gratia grauitas ponderis R sit 24. librarum, adeoque pondus R semper agat virtute 24. librarum; facta hac suppositione, primò fieri potest, vt pondus R agat contra pondus X virtute 12. librarum, & similiter contra pondus Z agat virtute 12. librarum: quo casu pondus R virtute 24. librarum æqualiter agit contra singula pondera X & Z, atque hic est vnus modus quo pondus R virtute 24. librarum agere potest contra singula pondera X & Z. Rursus fieri potest vt

pondus

pondus R agat contra pondus X virtute 16. librarum: verùm contra pondus Z tantum agat virtute 8. librarum : quo casu pondus R virtute 24. librarum inæqualiter agit contra singula pondera X & Z : atque hic est aliùs modus à priori diuersus, quo pondus R virtute 24. librarum potest agere contra singula pondera X & Z. Similiter fieri potest vt pondus R agat contra pondus X virtute 23. librarum : atque contra pondus Z agat virtute vnius libræ; quo casu pondus R virtute 24. librarum inæqualiter agit contra singula pondera X & Z: & tamen hic est iterum alius modus à duobus prioribus diuersus, quo pondus R virtute 24. librarum agere potest contra singula pondera X & Z.

Nothrus. Sufficit Tachine, sufficit: satis percepi quomodo fieri possit vt idem pondus R, semper eodem modo, siue æquali virtute agat contra duo pondera X & Z simul: & tamen successiuè diuerso modo, siue diuersa virtute agat contra singula ex ponderibus X & Z: & consequenter, quomodo pondus R possit semper eodem modo siue æquali virtute agere contra iugum C B, licet non semper eodem modo siue æquali virtute agat contra pondera X & Z: quod Mathimenus asserebat fieri in hypothesi de qua agimus; aliud tamen est id posse fieri, aliud est illud fieri; quare posse fieri quod asserebat Mathimenus libenter concedo, sed tamen non assequor quo fundamento asserat id fieri.

Tachinus. Credo equidem amicorum optime, nisi enim fallor, quare hoc fiat intelligere, nihil aliud est, quam propositæ quæstionis solutionem percipere. Considerentur enim duo casus: in vtroque casu pondus R agat virtute 24. librarum, in primo tamen casu singula pondera X & Z vno

palmo

palmo distent à sustentaculo A: in secundo casu pondus X vt prius distet vno palmo à sustentaculo A, verùm pondus Z duobus palmis distet à sustentaculo A, adeo vt primus casus à secundo non aliter differat, quam quod in primo casu pondus Z à sustentaculo A distet vno palmo, in secundo verò casu idem pondus Z ab eodem sustentaculo A distet duobus palmis: positis his duobus casibus, ex ijs quæ modo concessisti, manifestum est fieri posse, vt à pondere R in primo casu singula pondera X & Z virtute 12. librarum sustineantur, in secundo verò casu pondus X sustineatur virtute 16. librarum & pondus Z sustineatur tantum virtute 8. librarum: iam verò si etiam constaret hæc ità fieri, profectò constaret, quod pondus Z in secundo casu sustineatur minori, nempe octo librarum virtute: licet in primo casu sustineatur maiori, nempe 12. librarum virtute; quare si vlterius constaret causa huius effectus, cognita tibi foret causa cur in primo casu pōdus Z maiori virtute sustineatur, atq; minori virtute sustineatur in secundo casu; & quoniam primus casus à secundo non differt, nisi quod in primo pondus Z minus, siue vno palmo, distet à sustentaculo A; & in secundo casu magis, siue duobus palmis distet à sustentaculo A; etiam cognita foret causa, cur idem pondus Z in minori vnius palmi distantia à sustentaculo A, maiori virtute, atque adæquatè sustentetur: licet idem pondus Z in maiori duorum palmorum distantia à sustentaculo A, minori virtute, adeoque non adæquatè sustentetur; denique quia manifestum est quod pondus adæquatè sustentatum non possit descendere, quodque pondus non adæquatè sustentatum debeat descendere: cognita tibi foret causa cur pondus Z in minori vnius palmi distantia à sustentaculo

taculo A, non possit descendere atque adeo attollere pondus X, licet idem pondus Z in maiori duorum palmorum distantia à sustentaculo A, possit, immo debeat descendere atque adeo attollere pondus X.

Nothrus. Tui isti numeri Tachine arrident mihi, & clare exponunt mentem tuam, redduntque discursus maximè intelligibiles: videre enim mihi videor, esse planè possibile, vt in duobus casibus diuersis à te propositis, ab eodem ponderè R, diuerso modo siue diuersa virtute sustineatur pondus Z: atque fieri posse, vt Exempli Gratia in primo casu maiori 12. librarum virtute, & in secundo casu minori octo librarum virtute sustineatur idem pondus Z; probandum tamen foret, verum esse, quod tantum concessi esse possibile: atque afferenda causa quare necessario verum sit.

Mathimenus. Vt ad causæ huius cognitionem, compendiosa, atque commoda pergamus via, pauca à te peto de quibus quid sentias intelligere mihi proderit.

Nothrus. Pete quod places: nihil mihi commodius quàm respondere quod sentiam: dummodo ad ea quæ non assequor, sufficiat reponere verbum nescio.

Mathimenus. Sit iugum C B sustentatum, vt repræsentatur in vndecima figura; quæ à figura decima (quam ante consideravimus) non aliter differt, quam quod vncus F, mediante fune C L B, sustineat iugum C B, quod in decima figura sustentabatur per chordam L A. Quæro quis ex duobus funibus partialibus L C & L B maiori virtute trahatur à pondere R, & consequenter per quam ex duabus eiusdem funis partibus L C & L B, maiori virtute agat siue trahat pondus R? Fig. 11

Nothrus. Certe nulla mihi apparet dubitandi ratio, sed planè euidens videtur, quod duo funes partiales L C & L B, siue eiusdem funis duæ partes L C & C B, singulæ æquali virtute trahentur à pondere R: & consequenter pondus R per singulas istas partes L C & C B agere æquali virtute, dummodo partes L C & C B sint inter se æquales.

Mathimenus. Sed quid si partes istæ L C & C B, sint inæquales inter se: atque Exempli Gratia pars L C sit quatuor palmorum, & pars L B sit duorum palmorum?

Nothrus. Nihil agis Mathimene, hoc casu inuertetur iugum C B; etenim funis liberè incumbens vnco F, gliscet supra vncum F, donec aut inter se æquales fiant partes L C & L B, aut certè totum iugum inuertatur; quod an verum sit, experiri facile est: atque ego expertus sum sæpissime.

Mathimenus. Quod te expertum asseris, verum scio: sed supponamus quod inuerti non possit iugum C B, vel abstrahamus ab eius inuersione.

Nothrus. Abstractiones illæ potius Logicam aut Metaphysicam redolent, quam Physicam: quare in his circumstantijs parum arrident: etenim propositæ difficultatis Physicam solutionem intellecturus adueneram. Deinde si supponatur aliquid impossibile, hinc aliud impossibile legitime inferre non erit tibi difficile; verum non chimæras venaturus, sed veritatem conspecturus adueneram.

Mathimenus. Si ita placet, efficiam vt etiam oculis spectare possis, esse possibile, vt non euertatur iugum C B, tametsi partes L C & L B sint inæquales: atque Exempli Gratia pars L C sit quatuor palmorum, & pars L B sit duorum palmorum.

Nothrus.

Nothrus. Si feceris, planè nouum atque inexpectatum, gratissimum tamen mihi exhibebis spectaculum: tibique non negabo assensum, quando contra opinionem meam testimonium ferent oculi mei: ab his edoctus existimo impossibile, quod tu asseris possibile.

Mathimenus. Inspice si placet casum in duodecima figura repræsentatum. Iugo B C adhæret tubus cylindricus I K, sic vt sit in directum cum fune O L: ipsi tubo I K insertus est baculus cylindricus terræ infixus in M, atque liberè mobilis per tubum I K; denique funis L C est quatuor palmorum, funis verò L B est duorum palmorum. Quæro modo an mediante chorda O L, suspendi, aut sursum trahi poterit iugum C B sic vt non inuertatur? si dubites quid respondendum sit, oculos tuos testes aduoca, atque experire quid fiat. Fig. 12

Nothrus. Manifestum est hoc casu iugum C B euerti non posse.

Mathimenus. Vides vt opinor tubum I K & baculum illi insertum nihil impedire nisi euersionem iugi C B, quod vt prius poterit sustentari, aut sursum trahi à pondere R, sine vllo euersionis periculo, tametsi funis L C sit quatuor palmorum, & funis L B tantum sit duorum palmorum.

Nothrus. Vt video verum est, quod existimabam impossibile: quia mihi in mentem non venerat à te propositum remedium contra iugi euersionem, sic vt casus de quo agebamus maneret inuariatus.

Mathimenus. Quæro igitur quod ante quæsieram, quodnam ex punctis C & B maiori virtute trahetur à pondere R, supposito quod funis L C sit quatuor palmorum, quodque funis L B sit tantum duorum palmorum.

Nothrus: Mihi non occurrit aliqua dubitandi ratio, etenim siue breuior siue longior sit funis, cæteris paribus eius extremitates semper æquali virtute trahūtur: & consequenter in casu proposito puncta C & B æquali virtute trahentur à pondere R.

Mathimenus. Estne igitur vera, vel falsa, subsequens propositio quam abs te notari velim?

Propositio I.

Fig. 11 QVando virtus R, agendo per lineas rectas LC & LB, trahit puncta C & B: tunc per lineas LC & LB æquali virtute trahit singula puncta C & B: siue æquales, siue inæquales inter se sint lineæ LC & CB.

Nothrus. In casu de quo agimus hæc propositio verissima est, neque vnquam à me negabitur; & quoniam ità iubes illam mihi seruo sub titulo primæ propositionis.

Mathimenus. Antequam seponas primam propositionem, adde si placet illi alteram, quæ secunda sit:

Propositio II.

Fig. 12 VIrtus quæ per lineas LC & LB æqualiter trahit singula pūcta C & B inæqualiter distantia à puncto A: etiam inæqualiter sursum trahit singula ista puncta B & C.

Nothrus.

Nothrus. Notaui assertionem tuam, sub titulo secundæ propositionis: sed hanc me admissurum non spondeo; immo quid sibi velit non percipio.

Tachinus. Non percipis amplius Nothre, quod ante intellexisti atque ipse met monuisti? quare paulò ante iugo CB apponendus fuit tubus KI?

Notrus. Amæna interrogatio! quis melius quàm ego scit quid intelligam aut non intelligam: deinde quid cum tubo KI commune habet secunda propositio? in hac de iugi euersione non agitur, & tubus KI non alia de causa appositus fuit iugo CB, quam ne euerteretur iugum quando ex punctis C & B suspensa pondera inter se æqualia X & Z sustentantur, vel sursum trahuntur à virtute R, agente per rectas LB & LC, sic vt LC duplo maior sit quam LB.

Tachinus. Sed quod in proposito casu euersionis iugi periculum?

Nothrus. Quod euersionis periculum? illud quod prius dixi me sæpius experientia didicisse: quodque existimabam impediri non posse.

Tachinus. Quid igitur responderes ad subsequens argumentum? Pondus R semper æquali virtute trahit singula puncta C & B per rectas lineas LC & LB, vt constat ex prima propositione quam nunquam te negaturum asserueras: ergo puncta C & B quæ æquali virtute trahuntur à pondere R, etiam à virtute R æqualiter sursum trahuntur, atque sustinentur, licet lineæ LC et LB sint inter se inæquales: ergo si singula puncta C et B à ponderibus X et Z inter se æqualibus, æqualiter deorsum trahantur: etiam singula puncta C et B æqualiter sursum atque deorsum trahentur,

licet

licet lineæ L C et L B sint inæquales : ergo hoc casu, vel vtrumque punctum C et B, vel certe nullum ex punctis C et B debet ascendere : ergo hoc casu iugum C B inuerti non potest, vt asserebas te sepius expertum esse.

Nothrus. Stringit argumentum tuum Tachine; et vt video etiam vera est secunda propositio : non assequor tamen cur vera sit; nam in argumento à te proposito infertur hæc propositio, partim ex prima propositione, partim ex experimento : iam verò licet primam propositionem optimè assequar, atque à priori cognoscam eius veritatem : tamen ipsius experientiæ veritatem non nisi à posteriori cognosco : causa eius obscura mihi est, easdemque tenebras inuenio in secunda propositione : adeo vt cogar quidem admittere hanc propositionem veram esse, sed tamen simul cogar fateri me non assequi, quare vera sit.

Mathimenus. Rectè dicis Nothre; videamus an ego dissipare possim tenebras à te optime indicatas, atque efficere, vt clare videas causam cur vera sit secunda propositio. Si aliquod mobile traheretur per quatuor palmorum lineam C L, et alterum mobile traheretur per duorum palmorum lineam B L : quodnam ex istis mobilibus citius perueniret ad punctum L, supposito quod eodem tempore recedant à punctis C et B, quodque singula æqualiter resistant virtutibus motiuis, atque etiam trahantur æquali virtute.

Nothrus. Difficilis enim vero quæstio : Duo cursores æquali velocitate currunt, vnus in via duorum milliariorum, alter in via quatuor milliariorum : hoc posito quæritur quis ex his duobus cursoribus breuiori tempore perueniet ad viæ suæ terminum.

Tachinus.

Tachinus. Quid ad quæsitum respondes Nothre?

Nothrus. Respondeo planè euidens, atque manifestum esse, quòd mobile motum per rectam C L non perueniret nisi ad medietatem lineæ C L, quæ supponitur esse quatuor palmorum: quando mobile motum per lineam B L perueniret ad alterum eius terminum L, cum linea B L supponatur esse dimidia lineæ C L.

Tachinus. Sed aduerte quod linea C L minorem accliuitatem habeat quam linea B L.

Nothrus. Siue viæ per quam singuli cursores currunt æqualiter planæ, aut accliues: siue non æqualiter planæ aut accliues sint: dummodo cursores æquali velocitate currant, æquali tempore, æqualia spatia pertransibunt. Similiter in casu proposito, quoniam singula mobilia æquali virtute trahuntur, et æqualiter resistunt virtutibus trahentibus, æquali velocitate promouentur: et consequenter æqualibus temporibus per æqualia spatia siue per æquales lineas promouentur: quomodocunque excurrant lineæ illæ.

Mathimenus. Infero: igitur in casu à me proposito mobile quod trahitur per lineam C L, minus in altum, siue sursum trahitur, quam mobile quod trahitur per lineam B L: supposito quod mobilia illa singula æquali virtute resistant tractioni, & etiam æquali virtute trahantur per lineas C L & B L.

Nothrus. Consequentia euidens est.

Mathimenus. Ergo etiam in casu nostro, puncta singula C & B, æquali quidem virtute trahuntur per lineas C L & B L: sed tamen singula illa puncta non æquali, sed planè inæquali virtute trahuntur sursum, siue in altum: atque punctum

ctum C minori, punctum vero B maiori virtute trahitur in altum, siue sursum.

Nothrus. Nunc percipio quid velis; aliud est trahi, aliud est sursum trahi: & similiter aliud est æqualiter trahi, aliud est æqualiter sursum trahi. Duo pondera possunt singula æqualiter siue æquali virtute trahi, licet vnum trahatur per viam planam & alterum trahatur per viam accliuem: illud tamen quod trahitur per viam planam nullo modo sursum trahitur, illud vero quod trahitur per viam accliuem sursum trahitur: atque ità duo illa pondera quæ æqualiter trahuntur, non tamen æqualiter sursum trahuntur. Pari modo in casu nostro quandoquidem linea C L obliquè excurrat, hoc est partim in latum partim in altum, etiam virtus totalis trahens per lineam L C partim in altum partim in latum trahit: atque adeo totalis virtus trahens per lineam L C, quodammodo constat ex duabus virtutibus partialibus, quarum vna in altum altera in latum trahit: iam vero quo est minor accliuitas lineæ C L per quam trahit totalis virtus, eo etiam minor est partialis virtus quæ in altum trahit, & altera partialis virtus quæ in latum trahit maior est, licet semper eadem sit virtus totalis: ex quo fit, quod considerando duas virtutes totales atque inter se æquales, quarum prima trahat per lineam L C habentem minorem accliuitatem, secunda autem trahat per lineam L B habentem maiorem accliuitatem: etiam partialis virtus in altum trahens minor erit in prima virtute totali, maior vero in secunda virtute totali: atque vicissim partialis virtus in latum trahens maior erit in prima virtute totali, & minor in secunda virtute totali; quoniam igitur in casu nostro ex duabus virtutibus inter se æqualibus, prima

trahit

trahit per lineam LC habentem minorem accliuitatem, & altera trahit per lineam LB habentem maiorem accliuitatem: partialis virtus in altum trahens, minor est in virtute totali trahente per lineam LC, quam in virtute totali trahente per lineam LB: atque adeo minori virtute in altum trahitur punctum C, quam punctum B: licet singula puncta C & B æquali virtute trahantur, vnum quidem per lineam LC, alterum per lineam LB, per quas lineas trahunt virtutes totales inter se æquales; hoc autem erat quod in secunda propositione asserebatur; quare illam propositionem veram agnosco, & cur vera sit clarissimè perspicio.

Mathimenus. Optime profectò Nothre! ex discursu tuo video, quod priores duas à te notatas propositiones optime perceperis, atque intellexeris, non tantum veras esse, sed etiam quare necessario veræ sint; his igitur tertiam appone, quæ talis est.

Propositio III.

Rigiditas, siue inflexibilitas iugi CB, facit, vt virtus R æqualiter sursum trahat singula puncta C & B: siue puncta ista trahat immediatè, agendo per rectas LC & LB: siue puncta ista mediatè trahat, immediatè tantum agendo per rectam LA.

Tachinus. Quid de hac propositione statuis Nothre?

Nothrus. Non cohæret cum prioribus; hic enim asseri-

tur puncta C & B æqualiter sursum trahi à virtute R: & tamen ex secunda propositione constat puncta C & B inæqualiler sursum trahi à virtute R.

Tachinus. Si à pondere R punctum C sursum trahatur virtute 8. librarum, & punctum B sursum trahatur virtute 16. librarum, an hoc casu puncta C & B non inæqualiter sursum traherentur?

Nothrus. Nemo non videt id tam manifestum esse, quàm clare patet numerum 8 non esse æqualem numero 16.

Tachinus. Considera modo si placet duos casus: in primo, pondus R trahat iugum per lineas L C & L B, qui casus repræsentatur in fig. 11. In secundo casu, qui repræsentatur in fig. 10. pondus R trahat iugum per vnam lineam L A, atque in vtroque casu punctum C sursum trahatur virtute 8. librarum; & punctum B sursum trahatur virtute 16 librarum; an verum non erit, quod in vtroque hoc casu æqualiter sursum trahentur puncta C & B?

Nothrus. Video quid velis, & nisi fallor propositarum propositionum sensum assequor. In prima propositione comparantur inter se tractiones quæ fiunt in punctis C & B: & asseritur puncta ista æquali virtute trahi, quando iugum sustentatur per duas lineas L C & L B. In secunda propositione comparantur inter se tractiones in altum, quæ fiunt in punctis C & B; & asseritur quod licet supposita inæqualitate linearum L C & L B, adhuc pergant æqualiter trahi singula puncta C & B: non tamen pergant æqualiter in altum trahi. In tertia propositione comparantur inter se duo casus diuersi, vnus in quo pondus R iugum sustentat per

lineas

lineas L C & L B, qui casus repræsentatur in vndecima figura; alter casus in decima figura repræsentatur, in quo pondus R iugum sustentat per vnam lineam L A: & comparando istos duos casus inter se, asseritur quod in vtroque casu æqualis sit virtus qua in altum trahitur idem punctum C, vel idem punctum B: quidquid sit de æqualitate vel inæqualitate virtutis, qua in singulis istis casibus in altum trahuntur diuersa ista puncta C & B.

Mathimenus. Rectè exposuisti sensum tertiæ propositionis: sed quid de eius veritate?

Nothrus. Videtur mihi quidem verisimilitudinem præseferre, non assequor tamen causam cur necessario vera sit.

Mathimenus. Considerando casum in quo iugum C B non inuertatur vel inuerti non possit sed tantum liberè sursum aut deorsum moueri, quem casum expendimus in consideratione figuræ 12. quæro an possibile sit vt puncta CAB inæqualiter ascendant?

Nothrus. Id impossibile esse manifeste patet, eoipso quod iugum CB supponitur rigidum atque inflexibile, quodque præterea non inuertatur, vt fit in casu de quo agimus.

Mathimenus. Quandonam ergo magis ascendunt puncta C A B, vel quando iugum C B trahitur per duas lineas L C & L B, vel quando trahitur per vnam lineam L A; dummodo vtroque casu iugum non inuertatur, atque idem pondus R trahat iugum?

Nothrus. Necessario æqualiter ascendunt in vtroque casu, propter iugi rigiditatem, quæ non permittit puncta illa inæqualiter ascendere nisi in ascensu aliquo modo inuertatur iugum.

Mathimenus. Sed puncta C & B quæ in vtroque hoc casu necessario æqualiter ascendunt, quando trahuntur ab eodem pondere R, etiam æquali virtute sursum trahuntur ab eodem pondere R; ergo pondus R æquali virtute sursum trahit puncta C & B, siue pondus illud R trahat iugum per duas rectas lineas L C & L B, siue tantum trahat iugum per rectam L A. Vt asseritur in tertia propositione.

Nothrus. Iam intelligo causam, quare necessario vera sit tertia propositio. Si minus perceptibiles aliæ non subsequantur, vltro fatebor omni ex parte mihi factum satis.

Mathimenus. Obscuriores nullæ subsequentur, sed neque clariores: etenim tribus propositionibus hactenus abs te notatis nullæ aliæ addendæ remanent: quandoquidem in notatis propositionibus habeas tria illa capita ex quibus adæquatè dependet solutio problematis de quo acturi conuenimus.

Nothrus. Si adeo facilis foret hæc solutio, profecto non latuisset per tot annorum millia, quot ab Aristotele ad hæc vsque tempora effluxere, & tu Mathimene tardè affuisses in hoc mundo, vt hanc solutionem primus adduceres in lucem, immo perspicacissimi philosophorum principis oculis non potuisset se subtrahere.

Mathimenus. Quidquid sit de Aristotelis perspicacitate aut de successorum eius ingenijs, alijsque huiusmodi quibus non aduersor: qui & tibi & quibuslibet alijs libenter cedo ingenij palmam; tu Nothre adhuc tantisper benignas aures mihi prebe, vt audias quid concludam, & postea statue, quod tibi placet. Si mihi per plura sæcula desideratæ solutionis palmam non placebit adscribere, de illa pro libitu tuo dispones.

nes. Quæstionis status initio discursus nostri propositus tibi vt opinor non excidit.

Nothrus. Memini quam optime: tota difficultas ad hoc reducitur, vt assignetur causa quare pondus Z, quod prius præcisè sustinet pondus X, postea vincat atque attollat pondus X, præcisè per hoc, quod postea magis remotum sit à puncto A: adeoque per hanc remotionem quodammodo vires acquirat.

Mathimenus. Ad quæsitum respondeo, causam physicam huius effectus esse, quia à pondere R, siue quod idem est, à virtute quæ iugum cum appensis ponderibus sustinet, minori virtute sustinetur in altum punctum C, quod magis remotum est à puncto A: quam punctum B, quod minus remotum est à puncto A. Quare si ex tribus propositionibus à te notatis, approbatis, atque tuo etiam iudicio manifestissimis legitime inferam hic à me assertam veritatem: concedendum tibi erit, à me recte solutam esse propositam difficultatem atque me præstitisse quod promiseram.

Nothrus. Si hoc feceris, tibi adscribo palmam; verùm non canamus triumphum ante victoriam.

Mathimenus. Animum igitur applica ad sequentem discursum in forma syllogistica propositum. Pondus R quod immediatè per lineas L C & L B trahit puncta C & B, æquali virtute trahit singula puncta C & B per rectas L C & C B, siue lineæ istæ inter se æquales siue inæquales sint, vt constat ex prima propositione; sed etiam ex secunda propositione constat, quod pondus R per lineas L C & L B æqualiter trahens singula puncta C et B inæqualiter distantia à puncto A, etiam inæquali virtute sursum trahat singula puncta

ta

ta C et B, atque minori virtute sursum trahat punctum C magis distans à puncto A, maiori verò virtute sursum trahat punctum B minus distans à puncto A; ergo pondus R, quod immediatè per lineas L C & C B trahit puncta C & B inæqualiter distantia à puncto A, etiam inæquali virtute sursum trahit singula puncta C & B, minorique virtute sursum trahit punctum C magis distans à puncto A, maiori verò virtute sursum trahit punctum B minus distans à puncto A; atqui iuxta tertiam propositionem, pondus R æquali virtute sursum trahit singula puncta C & B, siue puncta ista trahat agendo per duas lineas L C & L B, siue agendo per vnicam lineam L A; ergo pondus R, trahens puncta C & B, siue trahat per duas lineas L C & L B, siue trahat per vnam lineam L A, etiam inæquali virtute sursum trahit singula puncta C & B inæqualiter distantia à puncto A, minorique virtute sursum trahit punctum C magis distans à puncto A, atque maiori virtute sursum trahit punctum B minus distans à puncto A; atqui in casu de quo agimus quique in 10. figura repræsentatur, pondus R iugum cum appensis ponderibus sustinens per vnam lineam L A trahit puncta C & B, quorum vnum C magis, alterum B minus distat à puncto A; ergo in casu de quo agimus, pondus R minori virtute in altum trahit punctum C magis distans à puncto A, atque maiori virtute in altum trahit punctum B minus distans à puncto A. Quod erat probandum.

Tachinus. Optimè reuera Mathimene, quin & clarissimè sine speculatiua Mathesi euicisti quod assumpseras probandum: neque video quid vlterius requiri possit ad propositi problematis plenam solutionem, cuius difficultates singulas

gulas successiue atque omni ex parte enodasti.

Nothrus. Optima tibi Tachine et clarissima omnia; nomen tuum non male refers: nescio tamen an in intelligendo, vel in credendo, vel certè in assentiendo tanta tua velocitas sita sit. Ego quidem non nego, quod propositum à te argumentum rectè concludat; non reputo tamen clarissima omnia.

Tachinus. Argumentum in forma syllogistica concludit quod probandum supererat. Deinde nihil assumit præter propositiones à te admissas, tuo iudicio clarissimas, atque à te per causam cognitas; an ergo clarissima, atque per causam cognita non est conclusio, quæ non nisi ex clarissimis, atque per causam cognitis veritatibus legitimo discurso infertur?

Nothrus. Distinguo Tachine: talis conclusio clarissima est claritate illationis, siue consequentiæ concedo: claritate obiecti siue consequentis nego. Fateor me clare conspicere solutionem legitime inferri ex propositionibus mihi clarissimis atque per causam cognitis: sed ipsius solutionis conceptum adæquatum, & clarum, needum inuenio in mente mea; beares me Tachine, si paulo maius lumen afferres, quo solutionem allatam, clarius possem conspicere, & frui eius cognitione, vt ità dicam intuitiua, atque comprehensiua:

Mathimenus. Prius Nothro profuerunt numeri: quid si ad numeros reducatur solutio?

Tachinus. Si per te mihi licet Mathimene, discursum tuum reducam ad numeros: tu tantum obserua, an rectè omnia atque ex mente tua. Supponatur pondus R appendere 24. libras, & singula pondera X & Z appendere libras 12. Præterea considerentur duo casus inter se diuersi: in vtroque

pon-

pondus X dependeat ex puncto B & pondus Z suspensum sit ex puncto C, atque distantia puncti C à puncto A, sit maior quam distantia puncti B ab eodem puncto A; in primo tamen casu, pondus R sustineat iugum BC per vnicum funem LA, vt repræsentatur in decima figura; in secundo casu, pondus R sustineat iugum BC per duos partiales funes LC & LB, ex quibus LC longior sit quam LB, vt repræsentatur in vndecima figura. His præsuppositis, ità discurro. In secundo casu pondus R appendens 24. libras, per singulos funes LC et LB trahit singula puncta C et B virtute 12. librarum, vt patet ex prima propositione (pag. 220.); sed etiam per hypothesim punctum C magis distat à puncto A, quam punctum B distet ab eodem puncto A: ergo iuxta secundam propositionem, in secundo casu, à pondere R minori virtute sursum trahitur punctum C quam punctum B: sed quoniam pondus R est 24. librarum, puncta C et B simul, à pondere R sursum trahuntur virtute 24. librarum, adeoque virtus qua punctum C sursum trahitur à pondere R, simul cum virtute qua punctum B sursum trahitur ab eodem pondere R, constituit virtutem 24. librarum: ergo in secundo casu, virtus qua punctum C sursum trahitur, est minor virtute qua punctum B sursum trahitur, & tamen duæ istæ virtutes simul constituunt virtutem 24. librarum; ergo in secundo casu, virtus qua à pondere R sursum trahitur punctum C, est minor virtute 12. librarum, & virtus qua ab eodem pondere R sursum trahitur punctum B, est maior virtute 12. librarum; ergo iuxta tertiam propositionem (pag. 225.) etiam in primo casu, virtus qua à pondere R sursum trahitur punctum C, est minor virtutute 12. librarum: et virtus qua ab eodem

eodem pondere R sursum trahitur punctum B, est maior virtute 12. librarum; sed in primo casu punctum C à pondere X deorsum trahitur virtute 12. librarum: et etiam punctum B à pondere Z deorsum trahitur virtute 12. librarum; ergo in primo casu maior est virtus qua punctum C deorsum trahitur, quam virtus qua idem punctum C sursum trahitur: et è contra minor est virtus qua punctum B deorsum trahitur, quam virtus qua idem punctum B sursum trahitur; igitur in primo casu punctum C debet moueri deorsum, & punctum B debet moueri sursum.

Nothrus. Pluribus non indigeo Tachine: nisi enim fallor dissipatæ sunt tenebræ omnes, quæ occupabant mentem meam: atque tam clarè conspicio quod desiderabam videre, vt ipse iam docere possem quod ex vestris discursibus didici. Veritatis huius experimentum vultis?

Mathimenus. Mihi certè foret gratissimum atque periucundum.

Nothrus. Pace igitur vestra, compendiosè repeto discursus nostri substantiam. Materia discursus nostri erat experientia Physica quæ docet quod in casu repræsentato in decima figura, hoc est, ex Stateræ iugo suspensa inter se æqualia pondera X & Z, hærere in æquilibrio quando suspenduntur ex punctis D & B æqualiter distantibus à puncto A: eadem verò pondera inter se æqualia, non amplius hærere in æquilibrio, quando puncta C & B ex quibus dependent inæqualiter distant à puncto siue hypomochlio A: adeo vt hoc casu, illud pondus, oppositum pondus attollat, quod magis distat ab hypomochlio; ex quo fit quod minoris grauitatis pondus ex vna Stateræ parte dependens, in æquilibrio sustineat,

neat, alterum atque maius pondus dependens ex opposita Stateræ parte; qui effectus præcisè atque adequatè causatur in Statera, per hoc quod distantia quam habet minoris grauitatis pondus ab hypomochlio A, sufficienter superet distantiam quam maioris grauitatis pondus habet ab eodem hypomochlio A; supposito hoc experimento passim cognito, quærebatur causa Physica quare crescente distantia ponderis X ab hypomochlio A, crescant vires eiusdem ponderis X, adeo vt pondus X possit sustinere pondus Z quādo pondus X magis distat ab hypomochlio A, licet idem pondus X non possit sustinere pondus Z quando pondus X minus distat ab hypomochlio A; quæ eadem difficultas alijs verbis breuius proponitur, quærendo quare, & quomodo vires crescant per Vectem.

Antequam respondeam ad propositam quæstionem, noto vnam assertionem, nimirum quod virtus rigidum iugum sustentans in A, æquali quidem virtute sustentet singula iugi puncta D & B æqualiter distantia à puncto A: sed tamen eadem ista virtus rigidum iugum sustentans in puncto A, inæquali virtute sustentet singula puncta C et B inæqualiter distantia à puncto A: ità vt minori virtute sustentet illud iugi punctum quod magis distat à puncto A, maiori verò virtute sustentet iugi punctum quod minus distat à puncto A. Hic annotatam assertionem prius probo, eam inferendo ex tribus propositionibus iam stabilitis atque annotatis in superiori discursu; deinde ostendo in hac ipsa assertione haberi causam incrementi virium per Vectem atque adeo propositi problematis solutionem. Superfluum tamen arbitror, pro stabilienda assertione à me hic annotata, aliud probare, quam

Fig. 10

illud,

illud, quod propemodum solum videtur probatione indigere, nimirum iugi puncta C & B inæqualiter distantia à puncto A, inæquali virtute sustentari, atque minori virtute sustentari punctum C, quod magis distat à puncto A: maiori vero virtute sustentari punctum B, quod minus distat à puncto A: hoc verum esse, probo tali discursu. In casu repræsentato in vndecima figura maior distantia puncti C à puncto A, quam puncti B ab eodem puncto A: est causa minoris accliuitatis in linea L C, quam in linea L B: sed minor accliuitas lineæ L C quam lineæ L B, est causa cur punctum C minori virtute sursum trahatur siue sustentetur à pondere R, atque ab eodem pondere maiori virtute sustentetur punctum B: vt constat ex probatione secundæ propositionis; ergo in casu repræsentato in vndecima figura, maior distantia puncti C à puncto A, quam puncti B ab eodem puncto A: est causa, cur ab eodem pondere R minori virtute sustentetur punctum C, quam punctum B; atqui etiam singula ista puncta C & B æquali virtute sustentantur à pondere R, tum in casu repræsentato in vndecima figura, tum in casu repræsentato in figura decima, vt constat ex tertia propositione atque eius probatione; ergo in casu repræsentato in decima figura maior distantia puncti C à puncto A, quam puncti B ab eodem puncto A, est causa cur ab eodem pondere R minori virtute sustentetur punctum C quam punctum B. Quod hic primo loco ostendendum assumpsimus. Stabilita in hunc modum asserta veritate, venio ad illud quod mihi probandum supererat: nimirum in asserta atque legitimè iam probata veritate haberi propositi problematis solutionem, siue causam, quare ad hoc vt pondera X & Z ex State-

ræ brachijs liberè ſuſpenſa ſint in æquilibrio, neceſſe ſit vt pondus X ſuſpenſum ex puncto C magis diſtante ab hypomoclio A ſit minus pondere Z quod ſuſpenſum eſt ex puncto B minus diſtante ab hypomoclio A. Si legitimè inferam, ad prius à me aſſertam atque ſtabilitam veritatem neceſſario ſequi effectũ hic indicatũ, cuius cauſa in problemate petitur, negari nõ poterit in eadẽ veritate haberi cauſam quæ in problemate petitur: quare reliquum eſt vt ex dicta veritate legitimè deducam quod hic propoſui de ponderibus X & Z ſuſpenſis ex Stateræ brachijs, quod probo tali diſcurſu. Vt põdera X & Z ex Stateræ brachijs ſuſpẽſa ſint in æquilibrio neceſſe eſt vt pondus X tanta virtutẽ deorſum trahat punctũ C ex quo dependet quanta virtute idem punctũ C ſurſum trahitur; atque inſuper pondus Z tanta virtute deorſum trahat punctum B ex quo dependet quanta virtute idem punctum B ſurſum trahitur; atqui ex iam aſſerta atque ſtabilita veritate conſtat, quod punctum C magis diſtans ab hypomochlio A, minori virtute ſurſum trahatur, quodque punctum B minus diſtans ab hypomochlio A maiori virtute ſurſum trahatur; ergo vt pondera X & Z ex Stateræ brachijs ſuſpenſa ſint in æquilibrio, neceſſe eſt vt pondus X minori virtute deorſum trahat punctum C, atque pondus Z maiori virtute deorſum trahat punctum B: ſed vt pondus X minori virtute deorſum trahat punctum C, atque pondus Z maiori virtute deorſum trahat punctum B, neceſſe eſt vt pondus X ſit minus pondere Z: ergo vt pondera X & Z ex Stateræ brachijs ſuſpenſa ſint in æquilibrio, neceſſe eſt vt pondus X ſuſpenſum ex puncto C magis diſtãte ab hypomochlio A, ſit minus pondere Z quod ſuſpenſum eſt ex puncto B minus diſtãte ab hypomochlio A. Quod erat probandum.

Errores hactenus notati.

PAgina 8. linea 14. alter *corrige* aliter. Pag. 17. lin. 5. conueniat quo ad ſigna † vel — *corrige* conueniat quo ad ſigna † vel —, patet ex antitheſi. Pag. 22. lin. 17. DAm *ſimul cum* eAm *corrige* DAn *ſimul cum* eAm. Pag. 57 lin. 14. = AF *in* AC *corrige* = AE *in* AC. Pag. 64. lin. 3. R 2 ✱ 27 *corrige* R 2 ✱ $\frac{1}{17}$. Pagina 67. lin. 15. R ✱ 564. *corrige* R 5 ✱ 64. Pag. 79. lin. 21. angulus CBX = angulo EZD *corrige* angulus CXA = angulo EZD. Pag. 83. & ſequentibus aliquoties irrepſit vox opportet loco vocis oportet. Pag. 91. lin. 5. *minorem vero angulum* corrige *maiorem vero angulum*. Pag. 99. lin. 8. angulum ACD = *corrige* angulum BCD =. Pag. 102. lin. 4. proptietates *corrige* proprietates. Pag. 102. lin. 14. propemedum *corrige* propemodum. Pag. 106. lin. 8. trangulum *corrige* triangulum. Pag. 108. linea vltima, latero anguli K *corrige* latere anguli K. Pag. 109. lin. 1. & 2. atque ducta recta LO per prob. 10. hic, ducatur recta MP parallela rectæ LO occurrens *corrige* atque ducta recta MP per prob. 10. hic, ducatur recta OL parallela rectæ MP. Pag. 109. lin. 7. ipſi AF parallelæ *corrige* ipſi AF parallela. Pag. 114. linea vltima, æquentur rectæ *corrige* æquantur rectæ. Pag. 115. lin. 12. ſit rcɑta *corrige* ſit recta. Pag. 174. lin. 8. Aequilibris lex *corrige* Aequilibrij lex. Pag. 210. lin. 6. ſermonem deuertat *corrige* ſermonem diuertat. Pag. 213. lin. 6. ſuppofita *corrige* ſuppoſita. Pag. 217. lin. 20. quod ſentiam *corrige* quid ſentiam. Pag. 229. lin. 25. per rectas LC & CB, *corrige* per rectas LC & LB. Pag. 230 lin. 5. per lineas LC & CB, *corrige* per lineas LC & LB.





